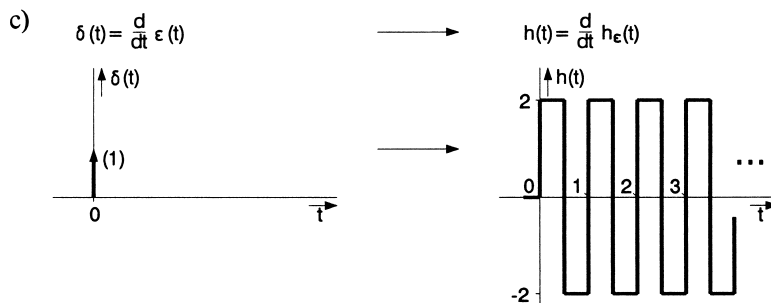
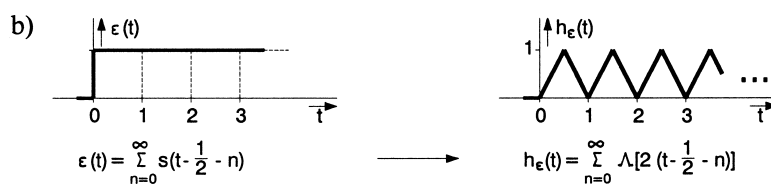
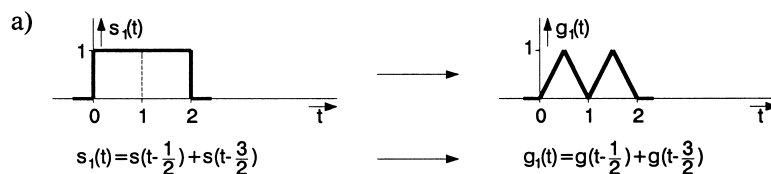
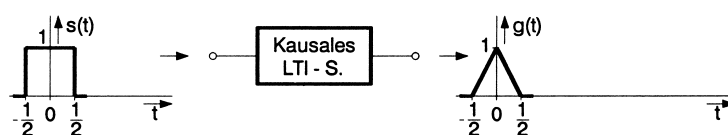


# Musterlösungen zu den Aufgaben der Kapitel 1–8

## Kapitel 1

1.1



1.2 **Linearität:**  $s(t) = \sum_i a_i s_i(t) \Rightarrow g(t) = \sum_i a_i g_i(t)$

a)  $g(t) = \frac{d}{dt} \sum_i a_i s_i(t) = \sum_i a_i \frac{d}{dt} s_i(t) = \sum_i a_i g_i(t) \Rightarrow$  linear

b)  $g(t) = [s_1(t) + s_2(t)]^2 = s_1^2(t) + 2s_1(t)s_2(t) + s_2^2(t)$   
 $\neq g_1^2(t) + g_2^2(t) \Rightarrow$  nichtlinear

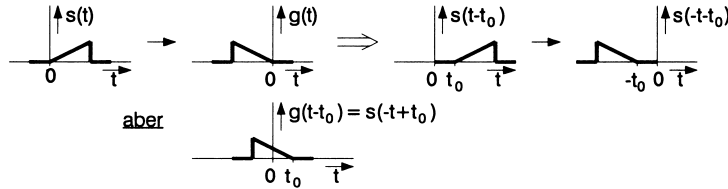
c)  $g(t) = \sum_i a_i s_i(-t) = \sum_i a_i g_i(t) \Rightarrow$  linear

d)  $g(t) = \sum_i a_i s_i(t) + 1 \neq \sum_i g_i(t) \Rightarrow$  nichtlinear

e)  $g(f) = \sum_i a_i s_i(t) \cdot m(t) = \sum_i a_i g_i(t) \Rightarrow$  linear

**Zeitinvarianz:**  $s(t - t_0) \Rightarrow g(t - t_0)$

- a)  $\frac{d}{dt}s(t - t_0) = g(t - t_0) \Rightarrow$  zeitinvariant  
 b)  $s^2(t - t_0) = g(t - t_0) \Rightarrow$  zeitinvariant  
 c) mit  $s(t) \rightarrow s(-t) = g(t) \Rightarrow s(t - t_0) \rightarrow s(-t - t_0)$   
 aber  $g(t - t_0) = s(-t + t_0) \Rightarrow$  nicht zeitinvariant



- d)  $s(t - t_0) + 1 = g(t - t_0) \Rightarrow$  zeitinvariant  
 e)  $s(t - t_0)m(t) \neq g(t - t_0) \Rightarrow$  nicht zeitinvariant  
 für  $m(t) \neq$  konstant

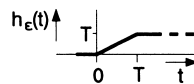
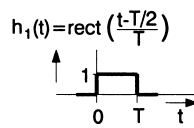
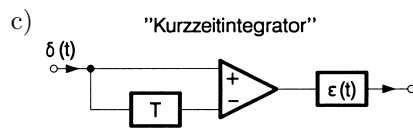
1.3 a) linear, da  $\int_{-\infty}^t \sum_i a_i s_i(\tau) d\tau = \sum_i a_i \int_{-\infty}^t s_i(\tau) d\tau = \sum_i a_i g_i(t)$

zeitinvariant, da  $\int_{-\infty}^t s(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} s(\tau) d\tau = g(t - t_0)$

b)  $s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$

$\Rightarrow h(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau \leq t \\ 0 & \text{für } \tau > t \end{cases}$

$\Rightarrow h(t) = \varepsilon(t)$



$s(t) \rightarrow g(t) = \int_{t-T}^t s(\tau) d\tau$

$\varepsilon(t) \rightarrow h_\varepsilon(t)$

1.4  $h_{RC}(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T}$

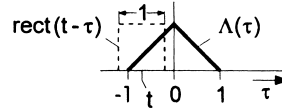
$h(t) = h_{RC}(t) * h_{RC}(t) = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) \varepsilon(t - \tau) e^{-\tau/T} e^{-(t-\tau)/T} d\tau$

$$= \frac{1}{T^2} e^{-t/T} \int_0^\infty \varepsilon(t-\tau) d\tau = \varepsilon(t) \frac{t}{T^2} e^{-t/T}$$

**1.5**  $s_1(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \Lambda(t)$

$$s_2(t) = \Lambda(t) * \text{rect}(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\tau) \text{rect}(t-\tau) d\tau$$



$$|t| > \frac{3}{2} \quad s_2(t) = 0$$

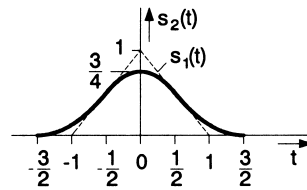
$$-\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \quad s_2(t) = \int_{-1}^{t+1/2} (1+\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \quad s_2(t) = \int_{t-1/2}^0 (1+\tau) d\tau + \int_0^{t+1/2} (1-\tau) d\tau$$

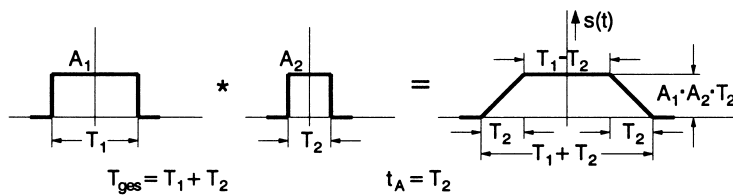
$$= \frac{1}{2} \left[ 2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

$$+\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \quad s_2(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 \quad [s_2(t) \text{ ist gerade!}]$$

$$s_2(0) = \frac{3}{4}, \quad s_2\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



**1.6** a)  $T_1 = 1, T_2 = T \quad (T_2 < T_1)$



b) für  $0 < T < 1/2$  gilt :

$$|t| > T + \frac{1}{2} \quad s(t) = 0$$

$$-\left(T + \frac{1}{2}\right) \leq t < -\frac{1}{2} \quad s(t) = \int_{-T}^{t+0,5} \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) d\tau$$

$$= \frac{T}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2T} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2} \leq t < T - \frac{1}{2} \quad s(t) = \frac{T}{2} + \int_0^{t+0,5} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau$$

$$= \frac{T}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2T} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

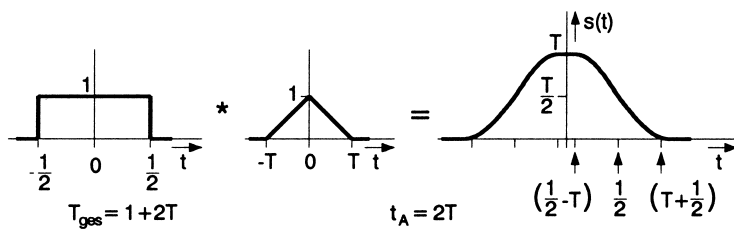
$$T - \frac{1}{2} \leq t < -T + \frac{1}{2} \quad s(t) = T$$

$$-T + \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \quad s(t) = \frac{T}{2} + \int_{t-0,5}^0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) d\tau$$

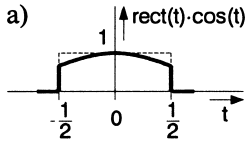
$$= \frac{T}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2T} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \leq t < T + \frac{1}{2} \quad s(t) = \int_{t-0,5}^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau$$

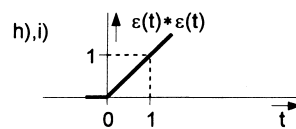
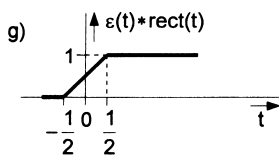
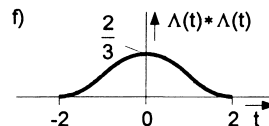
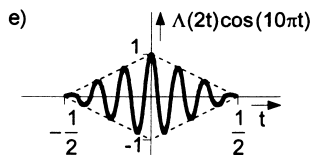
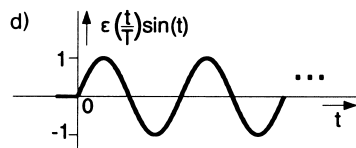
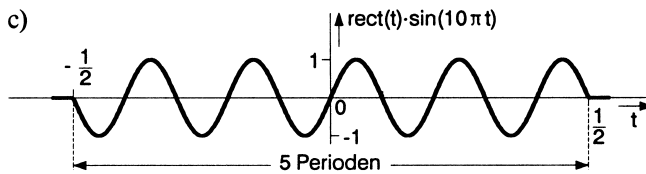
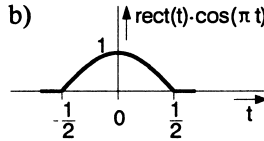
$$= \frac{T}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2T} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

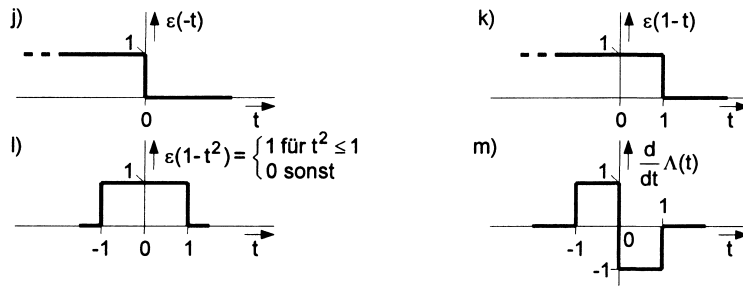


1.7 a)  $\uparrow \text{rect}(t) \cdot \cos(t)$



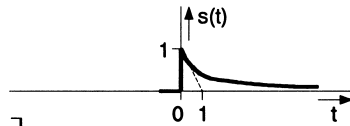
b)  $\uparrow \text{rect}(t) \cdot \cos(\pi t)$





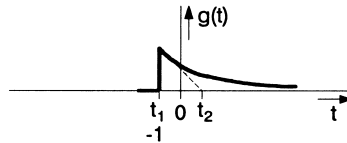
1.8

$s(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-t}$

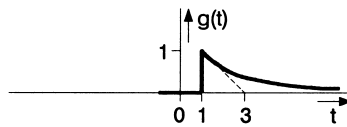


$g(t) = s\left[\frac{t+b}{a}\right] \quad t_1 = -b \Rightarrow s(0) ; \quad t_2 = a-b \Rightarrow s(1)$

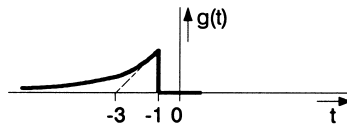
$a=2 \quad b=1$



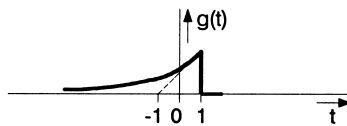
$a=2 \quad b=-1$



$a=-2 \quad b=1$

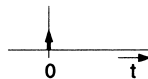


$a=-2 \quad b=-1$

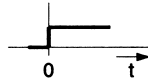


1.9  $s'(t) * h(t) = [\delta'(t) * s(t)] * h(t) = s(t) * \delta'(t) * h(t) = s(t) * h'(t)$  mit Assoziativgesetz und Kommutativgesetz der Faltungsalgebra.

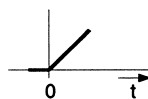
1.10  $n = 0 \quad \delta'(t) * \varepsilon(t) = \delta(t)$



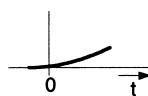
$n = 1 \quad \delta'(t) * \varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$



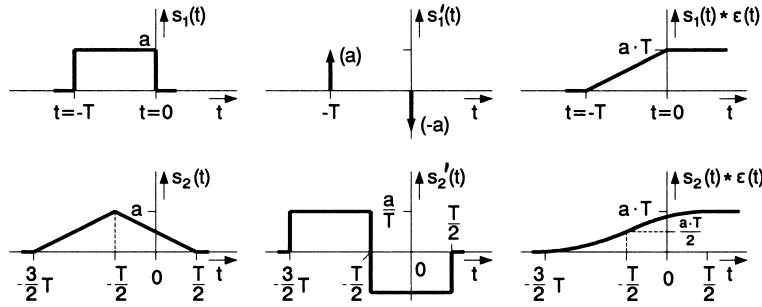
$n = 2 \quad \varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \varepsilon(t) \cdot t$



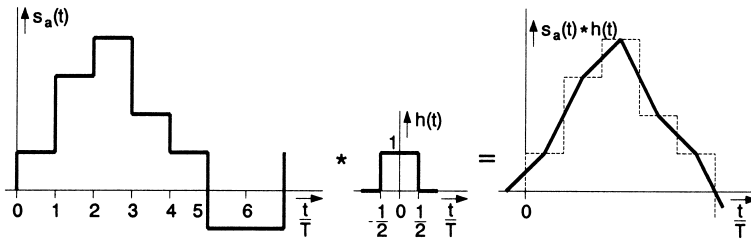
$n = 3 \quad \varepsilon(t) \cdot \frac{t^2}{2}$



1.11



1.12



1.13  $\delta(bt - t_0) = \delta \left[ b \left( t - \frac{t_0}{b} \right) \right] = \frac{1}{|b|} \delta \left( t - \frac{t_0}{b} \right)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(bt - t_0) dt = \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta \left( t - \frac{t_0}{b} \right) dt = \frac{1}{|b|} s \left( \frac{t_0}{b} \right)$$

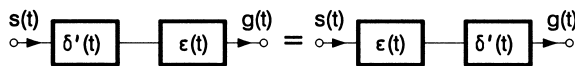
$$t - \frac{t_0}{b} = 0 \Rightarrow t = \frac{t_0}{b} \uparrow$$

1.14 mit (1.34) für  $t \rightarrow \infty$  folgt  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ , damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \delta(t) dt = a \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = a$$

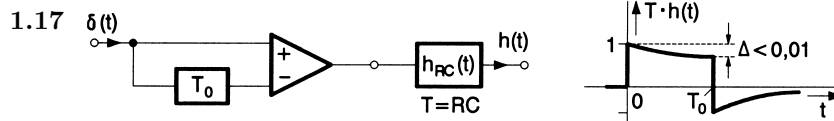
1.15 a)  $\int_{-\infty}^t \left[ \frac{d}{dt} \text{rect}(\tau) \right] d\tau = \int_{-\infty}^t \left[ \delta \left( \tau + \frac{1}{2} \right) - \delta \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \right] d\tau$   
 $= \text{rect}(t) = s(t)$

b)  $[s(t) * \delta'(t)] * \epsilon(t) = [s(t) * \epsilon(t)] * \delta'(t) = g(t) = s(t)$



1.16  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) dt \right]}_{A_g} d\tau$

$$= A_g \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) d\tau = A_g \cdot A_s$$



$$h_{RC}(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T}$$

$$\Delta = 1 - e^{-T_0/T} < 0,01 \Rightarrow T > 99,5 T_0$$

1.18 a) 
$$s(\tau) * [h(\tau) + g(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau)[h(\tau) + g(\tau)] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau)h(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

$$= [s(\tau) * h(\tau)] + [s(\tau) * g(\tau)]$$

b) zu zeigen:  $s(\tau) * [h(\tau) * g(\tau)] \stackrel{!}{=} [s(\tau) * h(\tau)] * g(\tau)$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau)h(\tau - u)g(u) du d\tau \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - v)s(v - w)h(w) dw dv$$

ist zu beweisen.

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - v)s(v - w)h(w) dw dv \quad \text{Subst.: } t - v = u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s[t - (u + w)]h(w)g(u) dw du \quad \text{Subst.: } u + w = \tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau)h(\tau - u)g(u) d\tau du \quad \text{q.e.d.}$$

Hinweis: Beweis ist einfacher im Frequenzbereich

1.19  $h_\varepsilon(t)$  – monoton steigende Funktion

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} h_\varepsilon(t)}_{h(t)} \geq 0 \Rightarrow h(t) \geq 0 \quad \text{q.e.d.}$$

1.20  $s(t) * h(t) \Big|_{t=0} = \int_0^{+\infty} h(t)s(-t) dt$  da  $h(t) = 0$  für  $t < 0$

1. Bed.:  $|s(t)| = 1$  (max. Amplitude)

2. Bed.:  $g(0)|_{\max} = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt$

$$\Rightarrow s(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } h(-t) < 0 \\ 1 & \text{für } h(-t) > 0 \end{cases} = \text{sgn}[h(-t)]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1.21} \quad & \left[ a_1 s_1 \left( \frac{t-t_1}{T} \right) \right] * \left[ a_2 s_2 \left( \frac{t-t_2}{T} \right) \right] \\
 &= a_1 a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1 \left( \frac{\tau-t_1}{T} \right) s_2 \left( \frac{t-t_2-\tau}{T} \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Subst.:  $\tau - t_1 = u$

$$= a_1 a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1 \left( \frac{u}{T} \right) s_2 \left( \frac{t-t_1-t_2}{T} - \frac{u}{T} \right) du, \quad \frac{u}{T} = \Theta$$

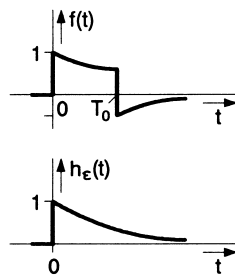
$$= a_1 a_2 |T| \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\Theta) s_2 \left( \frac{t-t_1-t_2}{T} - \Theta \right) d\Theta$$

$$= a_1 a_2 |T| g \left( \frac{t-t_1-t_2}{T} \right)$$

$$\mathbf{1.22} \quad h(t) = \delta(t) - \frac{\varepsilon(t)}{T} e^{-t/T} \quad \text{mit } T = L/R$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(t) &= h(t) * \text{rect} \left( \frac{t-T_0/2}{T_0} \right) = \text{rect} \left( \frac{t-T_0/2}{T_0} \right) \\
 &\quad - \left[ \text{rect} \left( \frac{t-T_0/2}{T_0} \right) * \left( \frac{\varepsilon(t)}{T} e^{-t/T} \right) \right] \\
 &= \text{rect} \left( \frac{t-T_0/2}{T_0} \right) - g(t) \quad f(T_0) = \pm |1 - e^{-T_0/T}|
 \end{aligned}$$

(Abb. 1.13)



$$\begin{aligned}
 \text{b) } h_\varepsilon(t) &= \varepsilon(t) e^{-t/T} \\
 &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$



## Kapitel 2

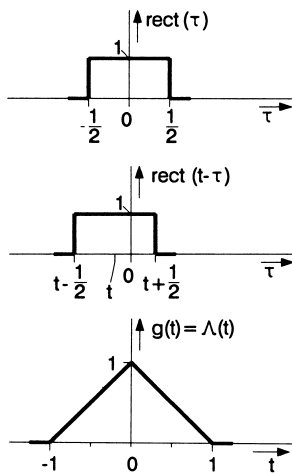
$$2.1 \quad a) \quad \text{Zeitbereich: } \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(\tau) \text{rect}(t - \tau) d\tau$$

Bereich I:  $-\infty \leq t < -1$   $g(t) = 0$  keine Überlappung

$$\text{Bereich II: } -1 \leq t < 0 \quad g(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} d\tau = t + 1$$

$$\text{Bereich III: } 0 \leq t < 1 \quad g(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} d\tau = -t + 1$$

Bereich IV:  $1 \leq t < \infty$   $g(t) = 0$



## Frequenzbereich:

$$\text{rect}(t) * \text{rect}(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{si}(\pi f) \cdot \text{si}(\pi f)$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\text{si}^2(\pi f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f) e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2 \left( \cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t) \right) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2 \cos(2\pi f t) df \quad \text{da } \sin(2\pi f t) \text{ ungerade}$$

$$= \dots \quad (\text{also schwieriger})$$

b) **Zeitbereich:**

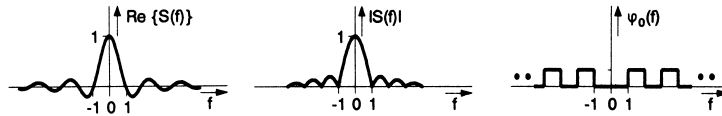
$$\begin{aligned} \text{si}(\pi t) * \text{si}(\pi t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}(\pi \tau) \text{si}[\pi(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau)}{\pi \tau} \frac{\sin[\pi(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau = \dots \text{ (also schwieriger)} \end{aligned}$$

**Frequenzbereich:**

$$\text{si}(\pi t) * \text{si}(\pi t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{rect}(f) \cdot \text{rect}(f) = \text{rect}(f) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \text{si}(\pi t)$$

2.2 a)  $s(t) = \text{rect}(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f) = \text{si}(\pi f),$

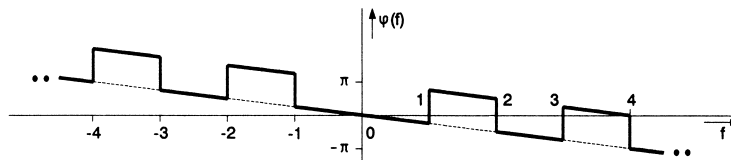
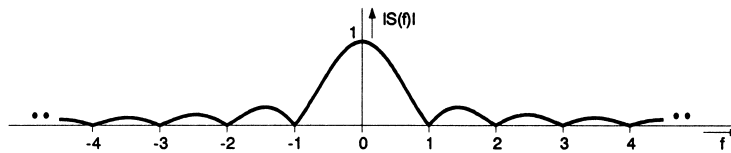
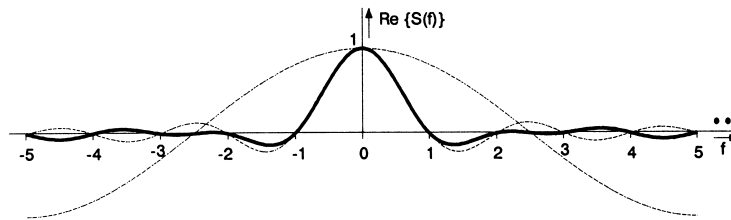
$$\varphi_0(f) = \begin{cases} 0 & \text{für } \text{Re}\{S(f)\} \geq 0 \\ \pi & \text{für } \text{Re}\{S(f)\} < 0 \end{cases}$$



b)  $s(t) = \text{rect}(t - 0, 1) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f) = \text{si}(\pi f) e^{-j2\pi f \cdot 0,1}$

$$\text{Re}\{S(f)\} = \text{si}(\pi f) \cos(2\pi f \cdot 0,1) \quad |S(f)| = |\text{si}(\pi f)|$$

Phase:  $\varphi(f) = \varphi_0(f) - 0,2\pi f$



2.3  $as(t) \circ \bullet aS(f)$

$as\left(\frac{t}{T}\right) \circ \bullet a|T|S(Tf)$

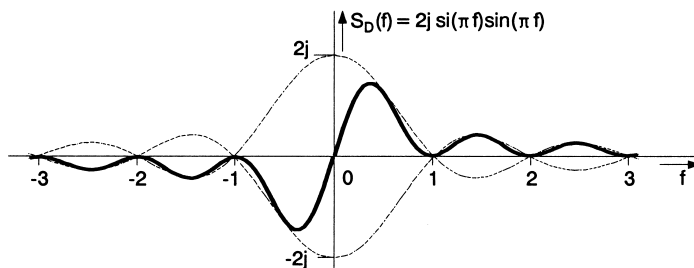
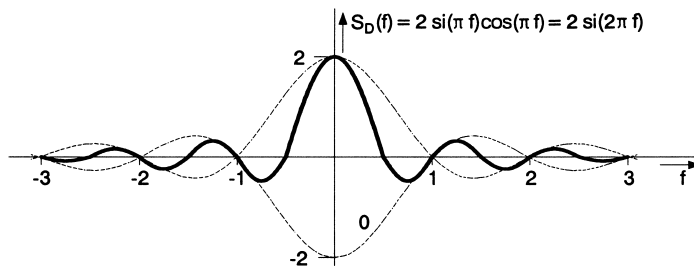
$as\left[\frac{1}{T}(t - t_0)\right] \circ \bullet a|T|S(Tf)e^{-j2\pi ft_0}$

2.4  $s_D(t) = s(t + t_0) \pm s(t - t_0) \circ \bullet S_D(f) = S(f)[e^{j2\pi ft_0} \pm e^{-j2\pi ft_0}]$

$S_D(f) = 2S(f) \cdot \begin{cases} \cos(2\pi t_0 f) \\ j \sin(2\pi t_0 f) \end{cases}$

$s(t) = \text{rect}(t), \quad t_0 = 1/2 \Rightarrow S(f) = \text{si}(\pi f)$

$\Rightarrow S_D(f) = \text{si}(\pi f) \cdot \begin{cases} 2 \cos(\pi f) \\ j 2 \sin(\pi f) \end{cases}$

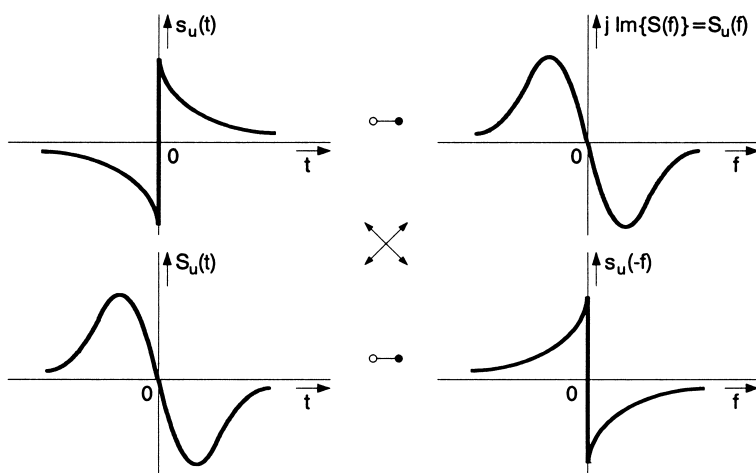


2.5  $s(t) = \frac{1}{T}\varepsilon(t)e^{-t/T} \quad \circ \bullet \quad S(f) = \frac{1}{1 + j2\pi T f} = \frac{1 - j2\pi T f}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}$

$s_g(t) = \frac{1}{2T}e^{-|t|/T} \quad \circ \bullet \quad \text{Re}\{S(f)\} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}$

$s_u(t) = \frac{1}{2T}\text{sgn}(t)e^{-|t|/T} \quad \circ \bullet \quad j \text{Im}\{S(f)\} = \frac{-j2\pi T f}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} = S_u(f)$

$S_u(t) = \frac{-j2\pi T f}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} \quad \circ \bullet \quad s_u(-f) = \frac{1}{2T}\text{sgn}(-f)e^{-|f|/T}$



2.6  $S(f - F) \bullet \circ s(t)e^{j2\pi Ft}$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Fouriertransformation}$$

$$s_1(t) = s(t)e^{j2\pi Ft} \circ \bullet S_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\pi(f-F)t)} dt = S(f - F)$$

2.7  $s(t) = e^{-\pi t^2}$ ,  $s(t)$  gerade  $\Rightarrow S(f) = \text{Re}\{S(f)\}$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi ft) dt$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-4\pi^2 f^2}{4\pi}\right) = e^{-\pi f^2}$$

$$e^{-\pi t^2} \circ \bullet e^{-\pi f^2}$$

2.8  $e^{-\pi t^2} \circ \bullet e^{-\pi f^2}$

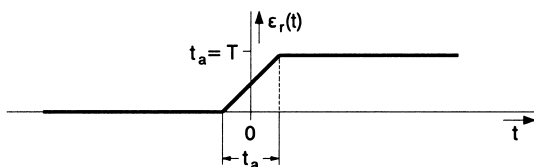
$$s_1(t) = e^{-\pi t^2} * e^{-\pi t^2} \circ \bullet S_1(f) = e^{-2\pi f^2} = e^{-\pi(\sqrt{2}f)^2}$$

mit  $|b|s(bt) \circ \bullet S(f/b)$  folgt mit  $b = 1/\sqrt{2}$

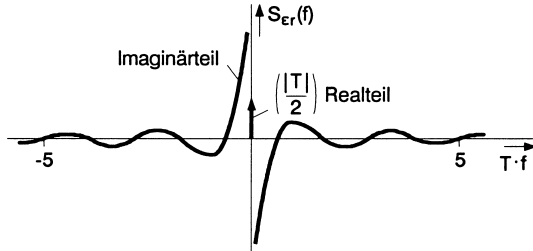
$$s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi(t/\sqrt{2})^2}$$

$$s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{-\pi t^2/(n+1)} \circ \bullet S_n(f) = e^{-\pi f^2(n+1)}$$

2.9  $\varepsilon_r(t) = \varepsilon(t) * \text{rect}(t/T)$   $t_a = 1 \mu s$   $t_a = T$



$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\varepsilon_r}(f) &= \left[ \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f} \right] |T| \operatorname{si}(\pi T f) \\ &= \frac{1}{2}|T|\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}|T| \operatorname{si}(\pi f) \end{aligned}$$



2.10  $s(t) = \varepsilon(t)e^{-t/T} \cos(2\pi Ft)$  ○—●

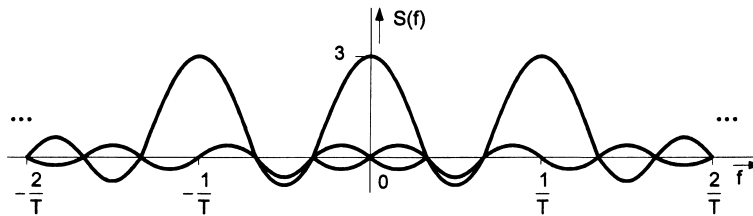
$$S(f) = \frac{T}{1 + j2\pi T f} * \left[ \frac{1}{2}\delta(f - F) + \frac{1}{2}\delta(f + F) \right]$$

2.11  $s(t) \sum_{n=-k}^k \delta(t - nT) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{(2k+1)T}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

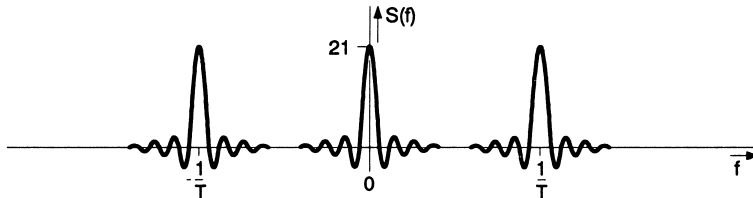


$$S(f) = (2k+1)|T| \operatorname{si}[\pi f(2k+1)T] * \left[ \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]$$

$k=1$  :  $S(f) = 3|T| \operatorname{si}(\pi f 3T) * \text{III}(Tf)$

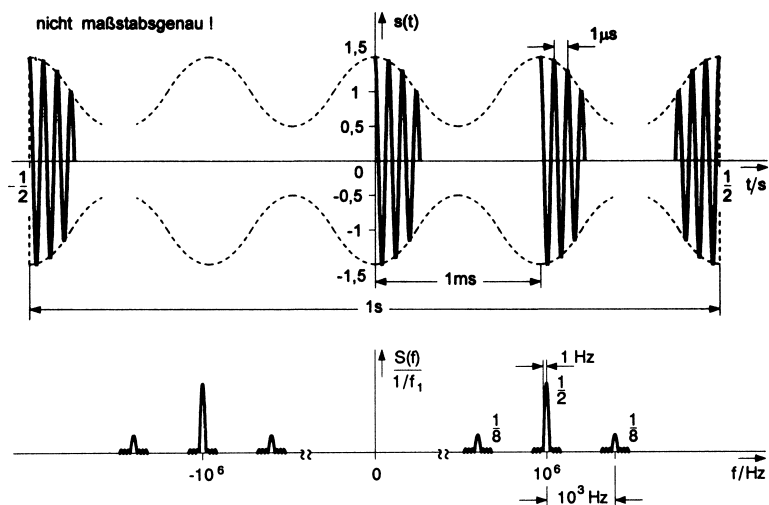


$k=10$  :  $S(f) = 21|T| \operatorname{si}(\pi f 21T) * \text{III}(Tf)$



2.12  $s(t) = \operatorname{rect}(f_1 t) \{ [1 + 0,5 \cos(2\pi f_2 t)] \cos(2\pi f_3 t) \}$

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{f_1} \operatorname{si}\left(\pi \frac{f}{f_1}\right) * \left[ \delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f - f_2) + \frac{1}{4}\delta(f + f_2) \right] \\ &\quad * \left[ \frac{1}{2}\delta(f - f_3) + \frac{1}{2}\delta(f + f_3) \right] \end{aligned}$$



**2.13** für  $s(t)$  reell folgt:  $s(t) = s_g(t) + s_u(t)$

$$S(f) = \underset{\text{gerade}}{\text{Re}\{S(f)\}} + j \underset{\text{ungerade}}{\text{Im}\{S(f)\}}$$

$$S(-f) = \text{Re}\{S(f)\} - \text{Im}\{S(f)\}$$

$$\Rightarrow S(-f) = S^*(f)$$

**2.14**  $s(t) = [\text{rect}(t) + \Lambda(2t)] * [\delta(t - 1, 5) + \delta(t + 1, 5) + \delta(t - 3, 5) + \delta(t + 3, 5)]$

$$S(f) = \left[ \text{si}(\pi f) + \frac{1}{2} \text{si}^2\left(\frac{\pi f}{2}\right) \right] \cdot [2 \cos(2\pi 1, 5 f) + 2 \cos(2\pi 3, 5 f)]$$

**2.15**  $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$  mit  $s(t) = \delta(t)$

$$S_\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^0 = 1$$

**2.16**  $S_1(f) * S_2(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi) S_2(f - \xi) d\xi|_{f=0}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi) S_2(-\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi) S_2^*(\xi) d\xi$$

da  $s_{1,2}(t)$  reell!

mit  $S_1(f) * S_2(f) \bullet \text{---} \circ s_1(t) \cdot s_2(t)$

$$\Rightarrow S_1(f) * S_2(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) e^{-j2\pi f t} dt|_{f=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \cdot S_2^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt \quad \text{q.e.d.}$$

**2.17**  $|S_T(f)| = \left| \int_0^T s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|$

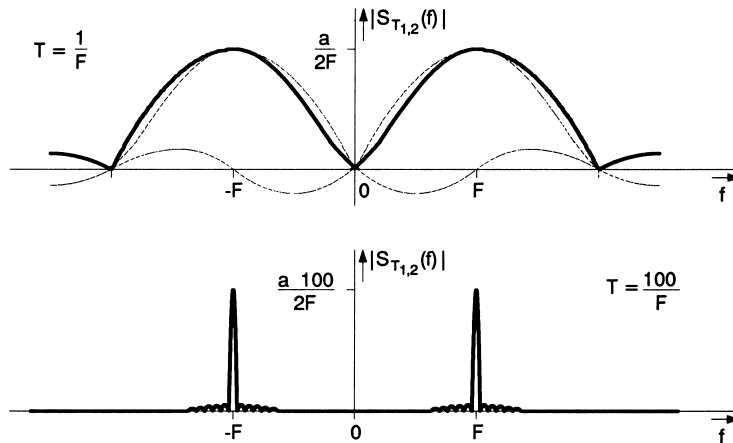
a)  $S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \text{rect} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right] e^{-j2\pi ft} dt$   
 $= S(f) * [|T| \text{si}(\pi f T) e^{-j2\pi f T/2}]$

mit  $s_1(t) = a \cos(2\pi F t)$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) = \left[ \frac{a}{2} \delta(f + F) + \frac{a}{2} \delta(f - F) \right] * [|T| \text{si}(\pi f T) e^{-j2\pi f T/2}]$$

mit  $s_2(t) = a \sin(2\pi F t)$

$$\Rightarrow S_{T_2}(f) = j \left[ \frac{a}{2} \delta(f + F) - \frac{a}{2} \delta(f - F) \right] * [|T| \text{si}(\pi f T) e^{-j2\pi f T/2}]$$



**2.18** a)  $s_g(t) = \frac{1}{2} [s(t) + s^*(-t)] \quad \circ \bullet \frac{1}{2} [S(f) + S^*(f)] = \text{Re}\{S(f)\}$

$$s_u(t) = \frac{1}{2} [s(t) - s^*(-t)] \quad \circ \bullet \frac{1}{2} [S(f) - S^*(f)] = j \text{Im}\{S(f)\}$$

b) mit (2.79) folgt:

$$s_+(t) = \frac{1}{2} s(t) + \frac{j}{2} s(t) * \frac{1}{\pi t} = \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \text{Re}\{s(t)\} - \text{Im}\{s(t)\} * \frac{1}{\pi t} \right]}_{\text{Re}\{s_+(t)\}} + \underbrace{\frac{j}{2} \left[ \text{Im}\{s(t)\} + \text{Re}\{s(t)\} * \frac{1}{\pi t} \right]}_{j \text{Im}\{s_+(t)\}}$$

und weiter mit (2.81):  $\text{Im}\{s_+(t)\} = -\text{Im}\{s_+(t)\} * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} \Rightarrow \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} = -\delta(t)$

$$\text{Re}\{s_+(t)\} * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{2} \left[ \text{Re}\{s(t)\} - \text{Im}\{s(t)\} * \frac{1}{\pi t} \right] * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{2} \left[ \text{Im}\{s(t)\} + \text{Re}\{s(t)\} * \frac{1}{\pi t} \right] = \text{Im}\{s_+(t)\}$$

und ähnlich

$$S_-(f) = S(f) \cdot \varepsilon(-f) \Rightarrow s_-(t) = \frac{1}{2} s(t) + \frac{j}{2} s(t) * \left( -\frac{1}{\pi t} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Im}\{s_-(t)\} = -\text{Re}\{s_-(t)\} * \frac{1}{\pi t}$$

c)  $\text{Re}\{S(f)\} = -\text{Re}\{S(-f)\} \Rightarrow s_g(t) \stackrel{!}{=} -s_g(-t) \Rightarrow \text{Re}\{s(t)\} \stackrel{!}{=} -\text{Re}\{s(-t)\} \Rightarrow \text{Re}\{s(t)\} = 0.$

Der Ansatz  $j \text{Im}\{S(f)\} = j \text{Im}\{S(-f)\} \Rightarrow s_u(t) \stackrel{!}{=} s_u(-t)$  führt auf dasselbe Ergebnis.

**2.19** Laplace-Transformation:  $S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$

$$s_1(t) = \varepsilon(t)e^{-t/T}$$

$$\Rightarrow S_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-pt} dt = \left[ -\frac{1}{(p+1/T)} e^{-(p+1/T)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+1/T}$$

$$s_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow S_2(p) = \int_0^T e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

Beide Signale absolut integrierbar  $\Rightarrow$  Fouriertransformierte und Laplacetransformierte gleich für  $p = j\omega$

$\Rightarrow$  Faltung: Multiplikation im "Spektralbereich"

$$\mathcal{L}\{s_1(t) * s_2(t)\} = \frac{T(1 - e^{-pT})}{p(1 + pT)}$$

**2.20**  $(j2\pi f)^n S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{(n)}(t)e^{-j2\pi ft} dt$  mit  $s^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} s(t)$

wegen

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \text{ (aus Schwarz'scher Ungleichung)}$$

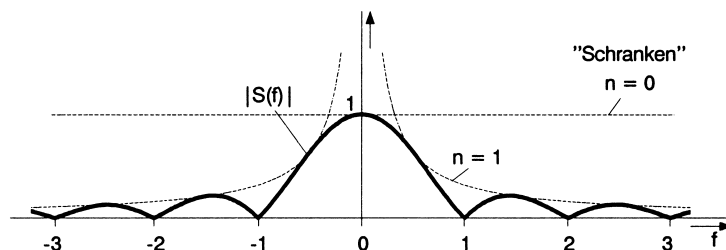
$$\Rightarrow |S(f)| \leq (2\pi f)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} |s^n(t)| dt \quad \text{q.e.d.}$$

a)  $s(t) = \text{rect}(t)$

$$n = 0 \quad |S(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) dt = 1$$

$$n = 1 \quad |S(f)| \leq |(2\pi f)^{-1}| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right| dt$$

$$= \frac{1}{|2\pi f|} \cdot 2 = \frac{1}{|\pi f|}$$



b)  $s(t) = \Lambda(t)$

$$n = 0 \quad |S(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(t)| dt = 1$$

$$n = 1 \quad |S(f)|$$

$$\leq |(2\pi f)^{-1}| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) \right| dt = \frac{1}{|\pi f|}$$



$$n = 2 \quad |S(f)| \leq |(2\pi f)^{-2}| \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t+1) - 2\delta(t-1)| dt = \frac{1}{|\pi f|^2}$$

**2.21** 
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)e^{j2\pi f\Theta} d\Theta \right] e^{+j2\pi ft} df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\Theta)} df \right) d\Theta$$

weiter ist, wieder mit (2.7) und (2.13)

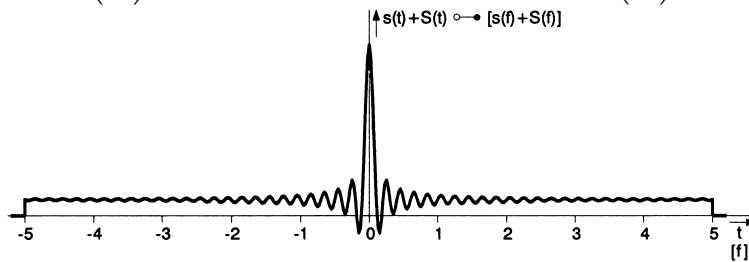
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df = \delta(t) \quad \text{und also}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)\delta(t - \Theta)d\Theta = h(t)$$

**2.22** Es sei  $s(t) =$  reell und gerade  $\Rightarrow S(f) =$  reell und gerade mit  $S(t) \circ \bullet s(-f)$   
 [Symmetrie-Theorem] folgt dann:  
 $s(t) + S(t) \circ \bullet S(f) + s(-f) = S(f) + s(f)$

**Beispiel:**  $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{10}\right) \circ \bullet S(f) = 10 \text{si}(\pi 10 f)$

$$= \text{rect}\left(\frac{t}{10}\right) + 10 \text{si}(\pi t 10) \circ \bullet 10 \text{si}(\pi f 10) + \text{rect}\left(\frac{f}{10}\right)$$



**2.23** 
$$S(0) = S(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{+j2\pi ft} df \Rightarrow s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df$$

**2.24** Es gilt:

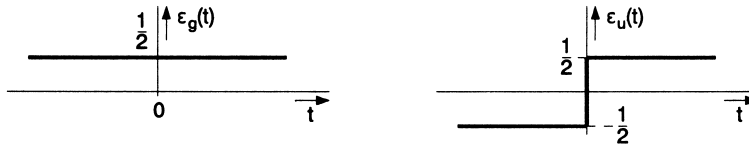
$$\left[ a_1 s_1 \left( \frac{t-t_1}{T} \right) \right] * \left[ a_2 s_2 \left( \frac{t-t_2}{T} \right) \right] \stackrel{!}{=} a_1 a_2 |T| g \left( \frac{t-t_1-t_2}{T} \right)$$

mit  $g(t) = s_1(t) * s_2(t)$  nach Aufgabe 2.3



$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_1|T|S_1(Tf)e^{-j2\pi ft_1} \cdot a_2|T|S_2(Tf)e^{-j2\pi ft_2} \\ &= a_1a_2|T|^2S_1(Tf)S_2(Tf)e^{-j2\pi f(t_1+t_2)} \\ &= a_1a_2|T|^2G(Tf)e^{-j2\pi f(t_1+t_2)} \quad \bullet \text{---} \circ \quad a_1a_2|T|g\left(\frac{t-(t_1+t_2)}{T}\right) \end{aligned}$$

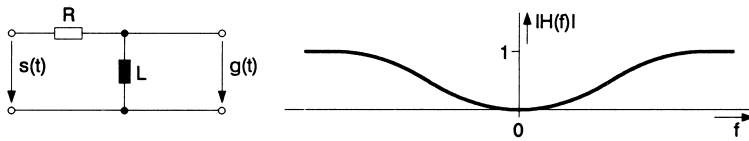
**2.25**  $\varepsilon(t) = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_u(t)$



$$\begin{aligned} \varepsilon_u(t) &\circ \text{---} \bullet \quad j \operatorname{Im}\{S_\varepsilon(f)\} \\ &\Rightarrow \operatorname{sgn}(t) = 2\varepsilon_u(t) \\ &\Rightarrow \operatorname{sgn}(t) \circ \text{---} \bullet \quad -j \frac{1}{\pi f} \end{aligned}$$

**2.26** Komplexe Wechselstromrechnung

$$H(f) = \frac{G(f)}{S(f)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$



$$\Rightarrow H(f) = \frac{j2\pi fL}{R + j2\pi fL}$$

**2.27** Vorausgesetzt werden wieder die Definitionen gemäß Fußnote 7 auf S. 36, d.h. ein "gerades" komplexwertiges Signal besitzt eine ungerade Funktion als Imaginärteil, ein "ungerades" komplexwertiges Signal eine gerade Funktion als Imaginärteil.

a) beide Signale "ungerade":  $\Rightarrow s_1(t) = -s_1(-t)$  imaginärwertig;  $s_2(t) = s_2(-t)$  reellwertig.

b) beide Signale "gerade":  $\Rightarrow s_1(t) = s_1(-t)$  reellwertig;  $s_2(t) = -s_2(-t)$  imaginärwertig.

c) Die Signale sind komplexwertig, da  $S_{1|2}(f) \neq S_{1|2}^*(-f)$ . Die Symmetrieeigenschaften des Spektrums bilden sich auf das Signal ab:

$$\begin{array}{cc} S_1(f) = S_1(-f) & S_2(f) = -S_2(-f) \\ \bullet \text{---} \circ & \bullet \text{---} \circ \\ s_1(t) = s_1(-t) & s_2(t) = -s_2(-t) \end{array}$$

Bezüglich der analytischen Komponenten gilt

$$\begin{array}{cc} S_1(f) \cdot \varepsilon(f) = S_2(f) \cdot \varepsilon(f) \\ \bullet \text{---} \circ & \bullet \text{---} \circ \\ s_{1,+}(t) = s_{2,+}(t) \end{array}$$

und weiter wegen der bekannten Symmetrieeigenschaften der Spektren

$$\begin{aligned}
 S_1(f) \cdot \varepsilon(-f) &= -S_2(f) \cdot \varepsilon(-f) \\
 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} & \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \\
 s_{1,-}(t) &= -s_{2,-}(t).
 \end{aligned}$$

Aus den Symmetrieeigenschaften des Spektrums  $S_1(f)$  folgt ebenfalls

$$\begin{aligned}
 S_1(f) \cdot \varepsilon(f) &= S_1(-f) \cdot \varepsilon(f) \\
 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} & \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \\
 s_{1,+}(t) &= s_{1,-}(-t).
 \end{aligned}$$

**2.28** Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt z.B. aus der linken Bedingung (die rechte Bedingung ist nur eine Umformung hiervon)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\{S(f)\} &= \operatorname{j} \operatorname{Im}\{S(f)\} * \left( -\frac{1}{\operatorname{j}\pi f} \right) \\
 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} & \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \\
 s_g(t) &= s_u(t) \cdot -\operatorname{sgn}(t)
 \end{aligned}$$

Dies kann nur für Signale mit  $s(t) = 0$  für alle  $t > 0$  erfüllt sein, also antikausale Signale.

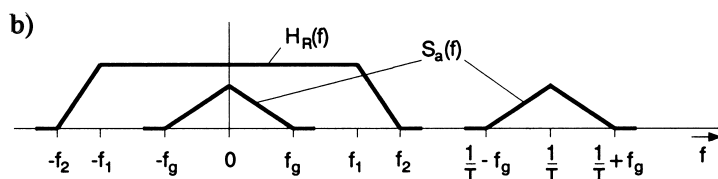
**Kapitel 3**

$$3.1 \quad s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{mit} \quad m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Rightarrow$$

$$a) \quad [s_1(t) + s_2(t)] \cdot m(t) = s_1(t) \cdot m(t) + s_2(t) \cdot m(t) \Rightarrow \text{linear}$$

$$b) \quad s(t - t_0) \cdot m(t) \neq s(t - t_0) \cdot m(t - t_0) \Rightarrow \text{nicht zeitinvariant}$$

$$3.2 \quad a) \quad f_g = 4 \text{ kHz} \Rightarrow \text{Nyquist-Rate } \frac{1}{T} = 2f_g = 8 \text{ kHz}$$



1.  $f_1 \geq f_g$  sonst Verzerrungen durch Flankenabfall  
 $\Rightarrow f_{1\min} = f_g$
2.  $\frac{1}{T} - f_g \geq f_2$  sonst Überlappung der wiederholten Spektren innerhalb des Tiefpasses.  
 $\Rightarrow \frac{1}{T_{\min}} \geq f_2 + f_g$

**3.3** Modell 1: lineare Torschaltung (“natürliche” Abtastung)

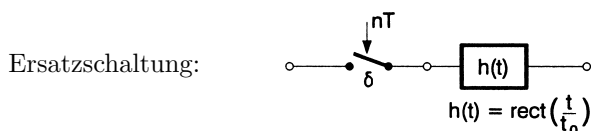
$$\begin{aligned} s_a(t) &= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT}{t_0}\right) \\ &= s(t) \cdot \left[ \text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] \\ S_a(f) &= S(f) * \left[ t_0 \cdot \text{si}(\pi f t_0) \cdot \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Das Spektrum wird mit einer Dirac-Stoßfolge gefaltet, die mit einer si-Funktion gewichtet ist. Fehlerfreie Rückgewinnung mit Tiefpass ist möglich.

## Modell 2: Abtast-Halteschaltung (“sample and hold”-Abtastung)

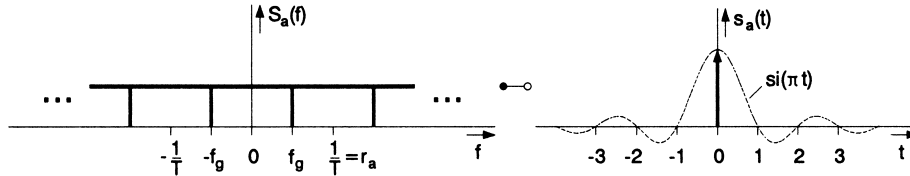
$$\begin{aligned} s_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \text{rect}\left(\frac{t - nT}{t_0}\right) \\ &= \text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) * \left[ s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right], \\ S_a(f) &= t_0 \text{si}(\pi f t_0) \cdot \left[ S(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|T|} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Das durch die Faltung mit einer Dirac-Stoßfolge periodisch wiederholte Spektrum wird mit einer si-Funktion multipliziert! Daraus resultieren lineare Verzerrungen. Fehlerfreie Rückgewinnung mit Tiefpass und Entzerrerfilter möglich.

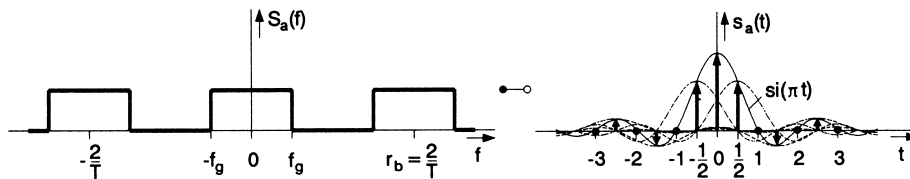


3.4  $s(t) = \text{si}(\pi t) \Rightarrow S(f) = \text{rect}(f)$

a)  $r_a = \frac{1}{T} = 2f_g$



b)  $r_b = \frac{2}{T} = 4f_g$

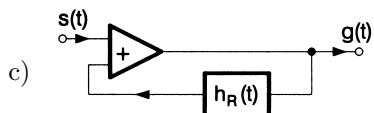


3.5 a)  $s_{T_{re}}(t) = \left[ s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] * \text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$



$$S_{T_{re}}(f) = \left\{ S(f) * \left[ \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] \right\} \cdot |T| \text{si}(\pi f T) e^{-j2\pi f T/2}$$

b)  $H(f) = \frac{1}{\text{si}(\pi f T)} \text{rect}\left(\frac{f}{f_g}\right)$  mit  $T = \frac{1}{2f_g}$



$\Rightarrow g(t) = s(t) + [g(t) * h_R(t)]$

$\Rightarrow g(t) * [\delta(t) - h_R(t)] = s(t)$

$G(f) \cdot [1 - H_R(f)] = S(f)$

$H_1(f) = \frac{G(f)}{S(f)} = \frac{1}{1 - H_R(f)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\text{si}(\pi f T)}$  für  $|f| \leq f_g$

$\Rightarrow H_R(f) = 1 - \text{si}(\pi f T)$  mit  $T = \frac{1}{2f_g}$

Realisierung mit Kurzzeitintegrator

3.6 a)  $\text{rep}_T s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$= s(t) * \left[ \frac{1}{|T|} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \right]$

$\text{comb}_T s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(t - nT) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$= s(t) \cdot \frac{1}{|T|} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right)$

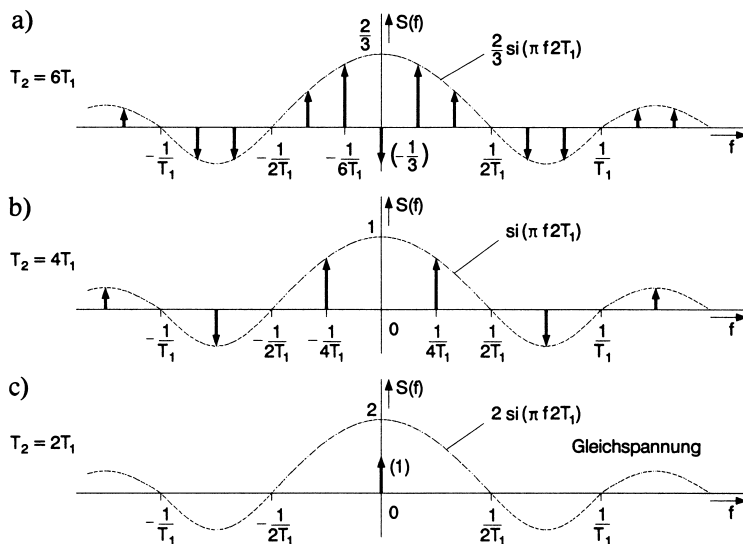
$$\text{rep}_T s(t) \circ \bullet S(f) \cdot \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = S(f) \text{ III}(Tf)$$

$$\text{comb}_T s(t) \circ \bullet S(f) * \left[ \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] = S(f) * \text{III}(Tf)$$

3.7  $s(t) = \left[ 2 \text{rect}\left(\frac{t}{2T_1}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_2) \right] - 1$



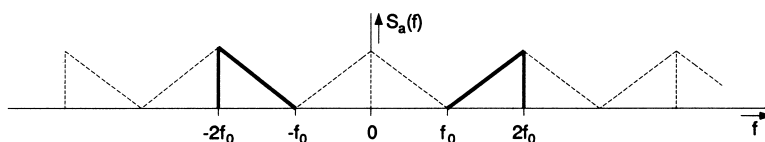
$$S(f) = 4|T_1| \text{si}(\pi f 2T_1) \cdot \frac{1}{|T_2|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_2}\right) - \delta(f)$$



3.8  $s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_0}\right) \circ \bullet S_a(f)$

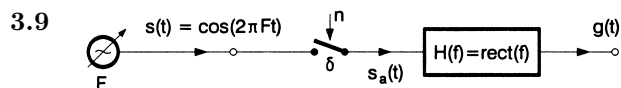
$$= S(f) * \left[ 2f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_0) \right]$$

$S(f) \neq 0$  für  $f_0 < |f| < 2f_0$



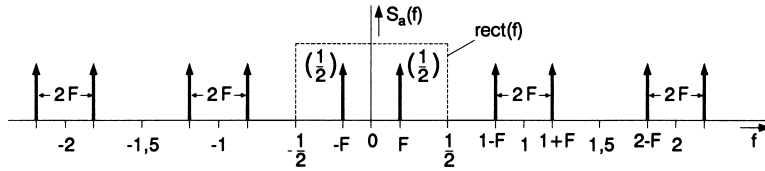
Rückgewinnung mit Bandpaß:

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{f_0}\right) * [\delta(f + 1,5f_0) + \delta(f - 1,5f_0)]$$

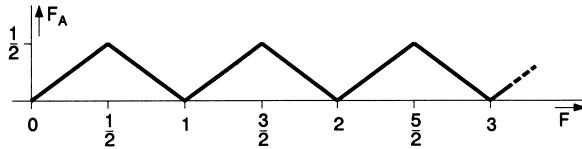


$$g(t) = \left[ \cos(2\pi Ft) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \right] * h(t)$$

$$G(f) = \left\{ \left[ \frac{1}{2}\delta(f+F) + \frac{1}{2}\delta(f-F) \right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \right\} \cdot \text{rect}(f)$$



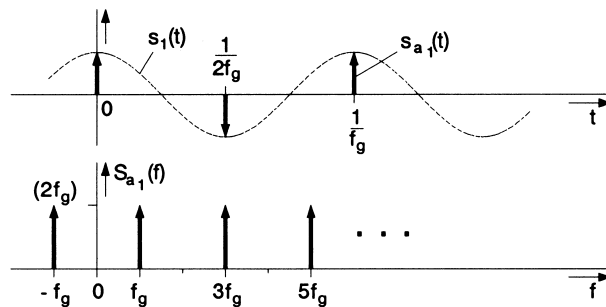
$$g(t) = \begin{cases} \cos(2\pi Ft) & 0 < F < \frac{1}{2} \\ \cos[2\pi(1-F)t] & \frac{1}{2} < F < 1,5 \\ \cos[2\pi(2-F)t] & 1,5 < F < 2,5 \end{cases} = \cos(2\pi F_A t)$$



3.10 a)  $s_1(t) = \cos(2\pi f_g t) \circ \bullet S_1(f) = \frac{1}{2}\delta(f+f_g) + \frac{1}{2}\delta(f-f_g)$

$$s_{a1}(t) = s_1(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_g}\right) \circ \bullet S_{a1}(f)$$

$$= S_1(f) * \left[ 2f_g \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_g) \right]$$



Rekonstruktion ergibt cos-Signal doppelter Amplitude

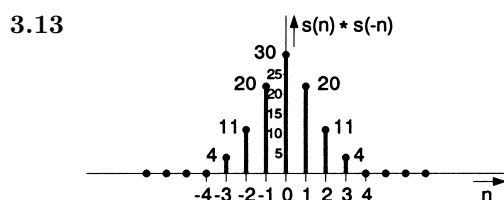
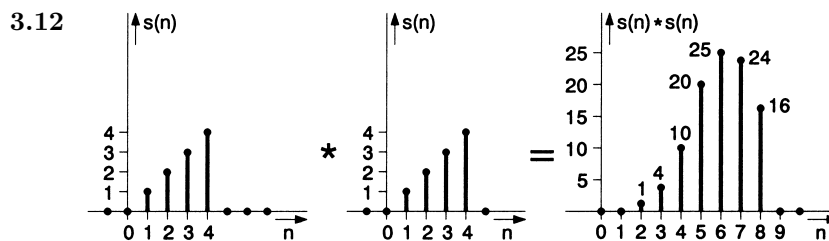
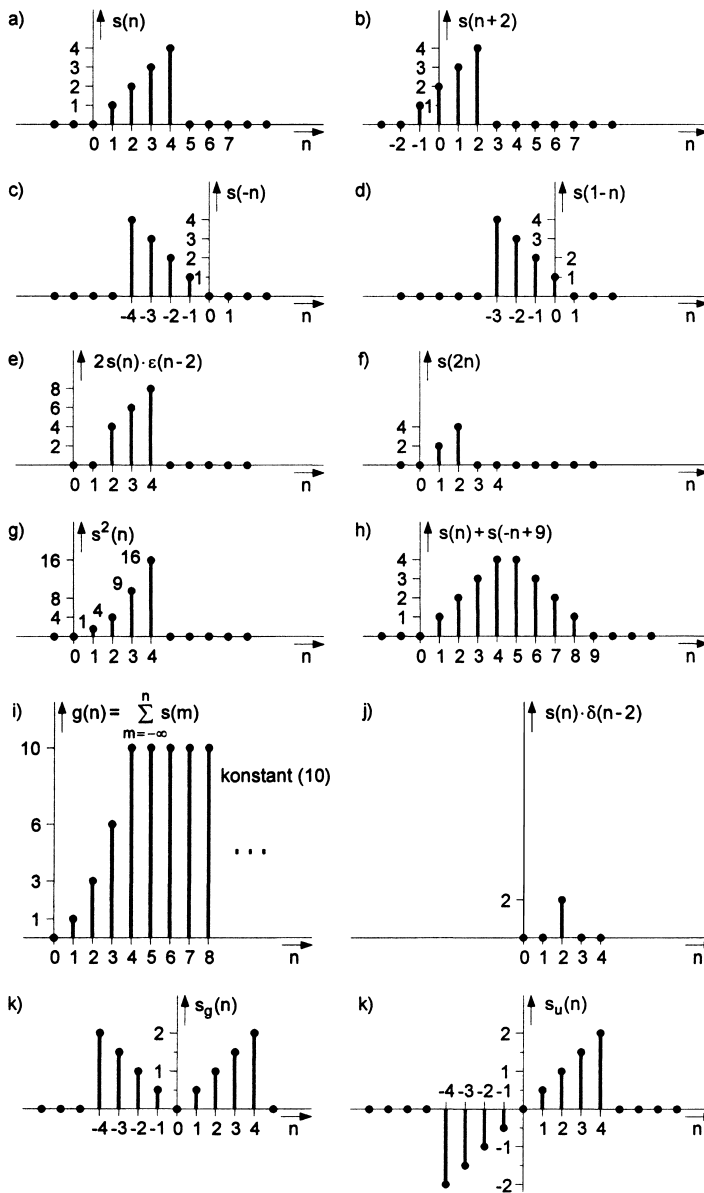
b)  $s_2(t) = \sin(2\pi f_g t) \circ \bullet S_2(f) = \frac{j}{2}\delta(f+f_g) - \frac{j}{2}\delta(f-f_g)$

$$s_{a2}(t) = s_2(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_g}\right) = 0 \circ \bullet$$

$$S_{a2}(f) = S_2(f) * \left[ 2f_g \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_g) \right] = 0$$

Abtastwerte und Rekonstruktion verschwinden hier.

3.11  $s(n) = n \cdot [\varepsilon(n) - \varepsilon(n-5)]$





3.14 Es gilt:  $|s(n)| \leq A$

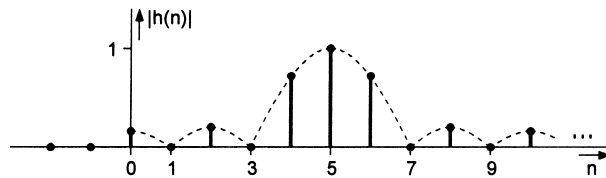
$$\begin{aligned} \Rightarrow |g(n)| &= |s(n) * h(n)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \cdot |s(n-m)| \\ &\leq A \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \stackrel{!}{<} \infty \end{aligned}$$

a)  $h(n) = \varepsilon(n) \cdot \cos(\pi n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) = \infty \Rightarrow \text{nicht stabil!}$$

b)  $h(n) = \varepsilon(n) \cdot a^n$  stabil für  $|a| < 1$  mit  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon(n) \cdot \text{si} \left[ \frac{\pi}{2}(n-5) \right] \right|$



$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \right)$$

divergent, da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$  divergent  $\Rightarrow$  nicht stabil!

3.15  $s(n) \rightarrow g(n) = \frac{1}{3}[s(n) + s(n-1) + s(n-2)]$

a)  $\sum a_i s_i(n) \rightarrow \frac{1}{3} \left[ \sum a_i s_i(n) + \sum a_i s_i(n-1) + \sum a_i s_i(n-2) \right]$   
 $= \sum a_i g_i(n) \Rightarrow$  linear

$$s(n-m) \rightarrow \frac{1}{3}[s(n-m) + s(n-m-1) + s(n-m-2)]$$

$$= g(n-m) \Rightarrow \text{verschiebungsinvariant}$$

b)  $h(n) = \frac{1}{3}\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{1}{3}\delta(n-2)$

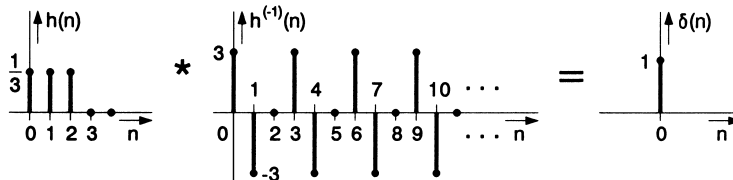
c)  $h(n) = 0 \quad \forall n < 0 \Rightarrow$  kausal

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| = 1 \Rightarrow \text{amplitudenstabil}$$

d)  $0, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \dots$

e)  $h(n) * h^{(-1)}(n) \stackrel{!}{=} \delta(n)$

mit "Papierstreifenmethode"



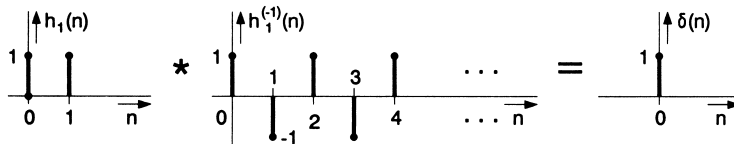
$$h^{(-1)}(n) = 3 \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n - 3m) - 3 \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n - 1 - 3m)$$

f)  $s(n) * h(n) = \frac{1}{3}[s(n) + s(n-1) + s(n-2)] = g(n)$

$g(n) * h^{(-1)}(n) = s(n) * h(n) * h^{(-1)}(n) = s(n) * \delta(n) = s(n)$  q.e.d.

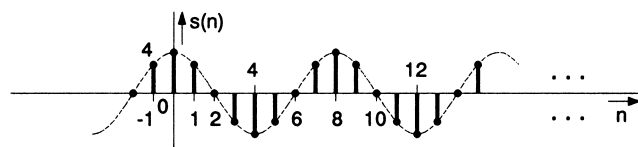
g)  $\sum_{n=0}^{\infty} |h^{(-1)}(n)| = \infty \Rightarrow$  nicht amplitudenstabil

h) mit "Papierstreifenmethode"



$$h_1^{(-1)}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \delta(n - m)$$

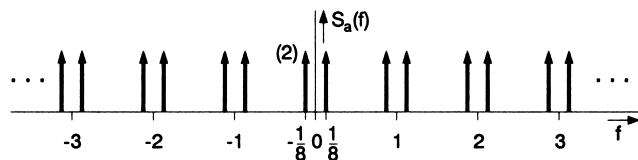
3.16 a)



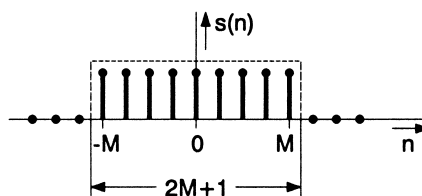
$$s(n) = 4 \cos(\pi n/4) \rightarrow s_a(t) = 4 \cos\left(2\pi \frac{t}{8}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$



$$S_a(f) = \left[ 2\delta\left(f + \frac{1}{8}\right) + 2\delta\left(f - \frac{1}{8}\right) \right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n)$$



b)  $s(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } |n| \leq M \\ 0 & \text{für } |n| > M \end{cases}$



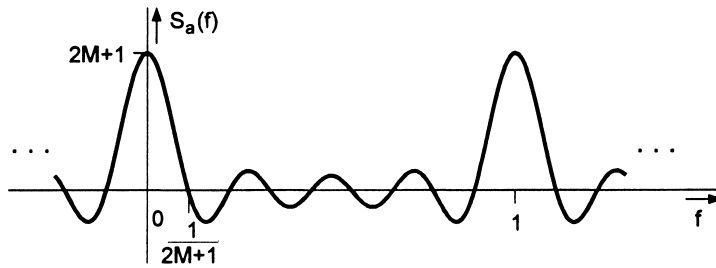
↓

$$s_a(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2M+1}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$



$$S_a(f) = (2M+1) \text{si}[\pi(2M+1)f] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) = \frac{\sin[\pi f(2M+1)]}{\sin(\pi f)}$$

(oder s. Aufgabe 2.11)



c)  $s(n) = a^{|n|}$

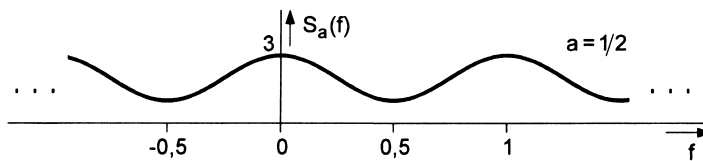
$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j2\pi n f}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} e^{-j2\pi f n} - a^0 \cdot e^0$$

mit  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| = |ae^{\pm j2\pi f}| < 1$

$$S_a(f) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}} + \frac{1}{1 - ae^{j2\pi f}} - 1$$

$$S_a(f) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \text{ mit } |a| < 1$$



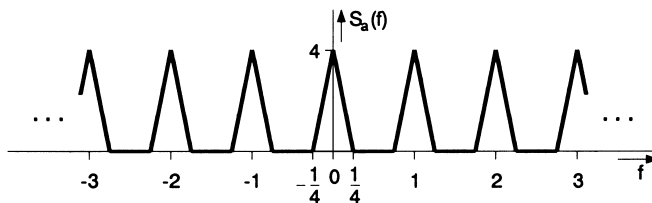
d)  $s(n) = \text{si}^2(\pi n/4)$

↓

$$s_a(t) = \text{si}^2(\pi t/4) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$

○●

$$S_a(f) = [4\Lambda(4f)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n)$$



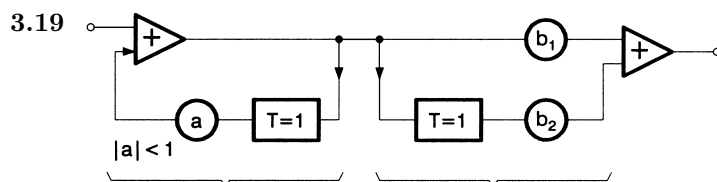
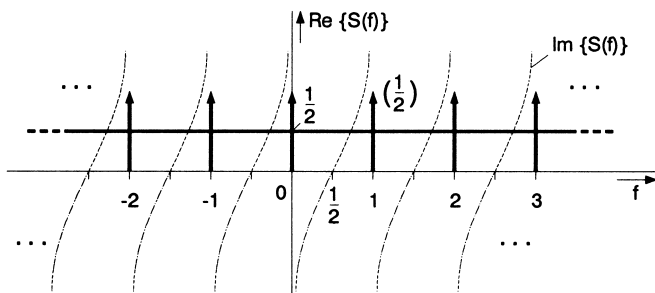
3.17  $s(n) = \delta(n - m) \circ \bullet \sum_{-\infty}^{\infty} s(n) \cdot e^{-j2\pi n f}$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n - m) \cdot e^{-j2\pi n f} = e^{-j2\pi m f}$$

damit:  $s(n - m) = s(n) * \delta(n - m) \circ \bullet S_a(f) \cdot e^{-j2\pi m f}$

3.18 mit  $\sum_{m=-\infty}^n s(m) \circ \bullet \frac{S_a(f)}{1 - \exp(-j2\pi f)} + \frac{1}{2} S_a(0) \lll(f)$  folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \sum_{m=-\infty}^n \delta(m) \circ \bullet \frac{1}{1 - \exp(-j2\pi f)} + \frac{1}{2} \lll(f) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \lll(f) - j \cot(\pi f)] \end{aligned}$$



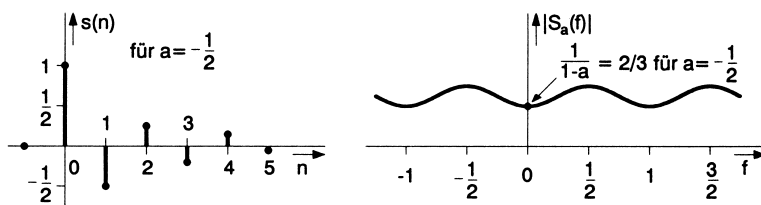
$$h(n) = [\varepsilon(n) \cdot a^n] * [b_1 \delta(n) + b_2 \delta(n - 1)]$$

mit  $b_1 = b_2$  folgt

$$H_a(f) = [1/(1 - e^{-j2\pi f} \cdot a)] \cdot b_1(1 + e^{-j2\pi f})$$

3.20  $s(n) = \varepsilon(n) \cdot a^n \circ \bullet S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(n) \cdot a^n \cdot e^{-j2\pi f n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [a \cdot e^{-j2\pi f}]^n = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi f}} \text{ für } |a| < 1$$



3.21  $S_d(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s_d(n) \cdot e^{-j2\pi kn/M} \quad k = 0, \dots, M-1$

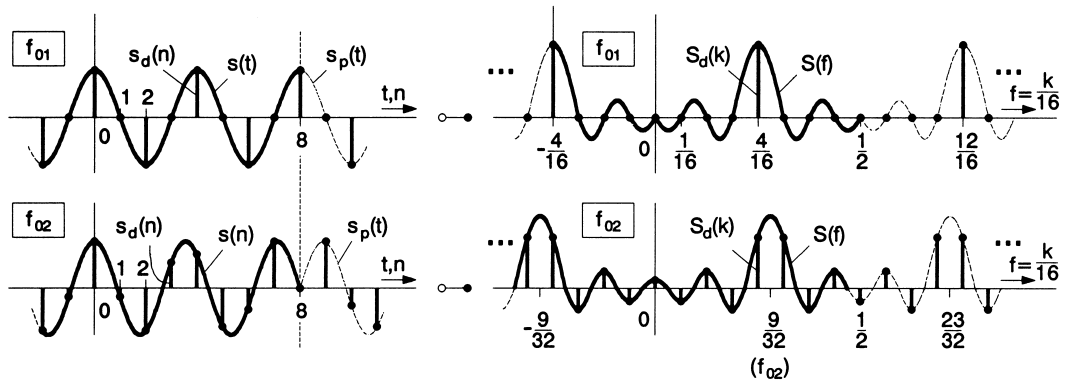
a)  $S_d(k) = \sum_{n=0}^{M-1} \delta(n) \cdot e^{-j2\pi kn/M} = e^{-j2\pi k \cdot 0/M} = 1$

b)  $S_d(k) = \sum_{n=0}^{M-1} [\delta(n) - a \cdot \delta(n - m)] \cdot e^{-j2\pi kn/M}$   
 $= 1 - a \sum_{n=0}^{M-1} \delta(n - m) e^{-j2\pi kn/M} = 1 - a \cdot e^{-j2\pi k \cdot m/M}$

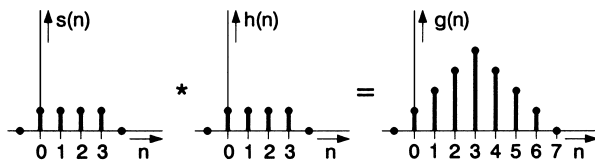
3.22  $s(t) = \text{rect}(t/16) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$  mit  $f_{01} = 8/32$  und  $f_{02} = 9/32$

a)  $S(f) = 16 \cdot \text{si}(\pi f 16) * \left[ \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \right]$

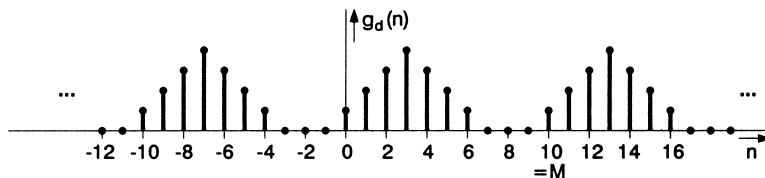
b, c)



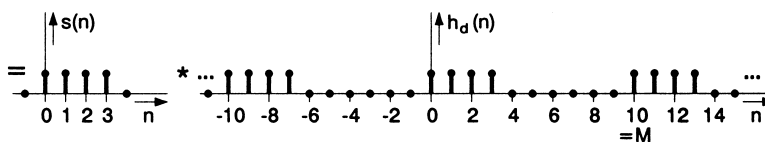
3.23  $s(n) * h(n) = g(n)$



$g(n) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - Mm) = g_d(n)$  mit  $M = 10$  gilt:

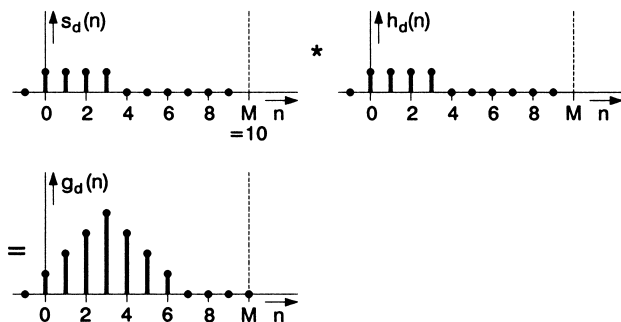


$g_d(n) = s(n) * \left[ h(n) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - Mm) \right]$



Periodische Faltung:

$$g_d(n) = \sum_{m=0}^{M-1} s_d(m)h_d(n-m) \quad \text{für } n = 0, \dots, M-1$$



- 3.24** a)  $n = 0 \dots M-1$ , daher  $M$  komplexe Operationen (Add.+Mul.) für jedes  $k$ ,  $M$  Werte von  $k \Rightarrow M^2$  Operationen  
 b)  $s_d(n) = 0$  für  $n < 0 \Rightarrow s_{d,1|2} = 0$  für  $n < 0$ ;  $s_d(n) = 0$  für  $n \geq M \Rightarrow s_{d,1|2} = 0$  für  $M \geq M/2$ .

$$S_d(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} s_d(n)W_M^{nk} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M/2-1} [s_d(2n) + s_d(2n+1)W_M^k] W_M^{2nk}$$

$$= \frac{1}{M} \left[ \underbrace{\sum_{n=0}^{M/2-1} s_{d,1}(n)W_{M/2}^{nk}}_{\frac{M}{2} S_{d,1}(k)} + W_M^k \underbrace{\sum_{n=0}^{M/2-1} s_{d,2}(n)W_{M/2}^{nk}}_{\frac{M}{2} S_{d,2}(k)} \right]$$

$$S_{d,1|2}(k + M/2) = \frac{2}{M} \sum_{n=0}^{M/2-1} s_{d,1|2}(n)W_{M/2}^{nk} \underbrace{W_{M/2}^{nM/2}}_{=e^{-j2\pi n}=1}$$

- c) Zur Berechnung der beiden Summen  $M$  komplexe Operationen  $n = 0 \dots M-1$  für jedes  $k$ , wegen Periodizität nur  $M/2$  verschiedene Werte von  $k$  zu berechnen  $\Rightarrow M^2/2$  Operationen, zusätzlich aber noch  $M$  komplexe Additionen der beiden Summen und  $M$  Multiplikationen mit  $W_M^k$  der rechten Summe, insgesamt also  $M^2/2 + M$  komplexe Operationen.  
 d) Wenn  $M$  Zweierpotenz ist, sind  $\text{lb}M$  Wiederholungen möglich. Insgesamt sind dann nur noch  $M \cdot (\text{lb}M + 1)$  komplexe Multiplikationen/Additionen auszuführen. Davon sind allerdings einige (z.B. für  $k=0$ ) immer reell. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache benötigt die FFT einen äquivalenten Aufwand von  $M \cdot \text{lb}M$  komplexen Multiplikationen/Additionen. Die Beschleunigung gegenüber a) ergibt demnach einen Faktor  $M/\text{lb}M$ , z.B.  $4096/12 \approx 341$  für  $M=4096$ .

### Kapitel 4

**4.1**  $|p_{sg}^E|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t) \cdot g(t)}{\sqrt{E_s \cdot E_g}} dt \right|^2 \leq \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \cdot \frac{1}{E_g} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt$

Mit  $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E_s, \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = E_g \Rightarrow |p_{sg}^E|^2 \leq 1$

**4.2**  $s(t) = \text{reell} \Rightarrow s(t) = s_u(t) + s_g(t)$  mit

$$s_g(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)] \text{ und } s_u(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)] \text{ reell}$$

$$\varphi_{s_u s_g}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_u(t) \cdot s_g(t) dt = 0, \quad \text{da } s_u(t) \cdot s_g(t) \text{ ungerade}$$

$\Rightarrow s_u(t)$  und  $s_g(t)$  sind orthogonal

**4.3** Bei periodischen Signalen genügt die Berechnung über eine ganze Zahl von Perioden, hier z. B. mit  $T = 1$ :

$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi_{s_1 s_1}^L(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a \cos(2\pi t) \cdot a \cos[2\pi(t + \tau)] dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \cos(2\pi\tau) \end{aligned}$$

$$\varphi_{s_2 s_2}^L(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a \sin(2\pi t) \cdot a \sin[2\pi(t + \tau)] dt = \frac{1}{2} a^2 \cos(2\pi\tau)$$

$$\varphi_{s_3 s_3}^L(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t + \tau) dt = \frac{1}{2}, \text{ da}$$

Fall 1:

$$\begin{aligned} \tau < 0, \varphi_{s_3 s_3}^L(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \varepsilon(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (T + \tau) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2T} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\tau \geq 0, \varphi_{s_3 s_3}^L(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \varepsilon(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \varphi_{s_1 s_1}^L(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a \cos(2\pi t) \cdot a \sin[2\pi(t + \tau)] dt \\ &= \frac{1}{4} a^2 \int_{-1}^1 (\sin(2\pi\tau) + \sin[2\pi(2t + \tau)]) dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin(2\pi\tau) \quad (\text{orthogonal!}) \end{aligned}$$

**4.4**  $s(-\tau) \star g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) \cdot g(t + \tau) dt$

Mit  $\Theta = t + \tau, d\Theta = dt$  und  $-t = \tau - \Theta \Rightarrow$

$$s(-\tau) \star g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - \Theta) \cdot g(\Theta) d\Theta = g(\tau) \star s(\tau) = s(\tau) \star g(\tau)$$

**4.5** a) Kommutativ: Nein

$$\varphi_{sg}^E(\tau) = s(\tau) \star g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)$$

$$\varphi_{gs}^E(\tau) = g(\tau) \star s(\tau) = g(-\tau) * s(\tau) = \varphi_{sg}^E(-\tau)$$

i. a. gilt:  $\varphi_{sg}^E(\tau) \neq \varphi_{gs}^E(\tau)$

## b) Assoziativ: Nein

$$[s(\tau) \star g(\tau)] \star h(\tau) = [s(-\tau) * g(\tau)] \star h(\tau)$$

$$= s(\tau) * g(-\tau) * h(\tau)$$

$$s(\tau) \star [g(\tau) \star h(\tau)] = s(\tau) \star [g(-\tau) * h(\tau)]$$

$$= s(-\tau) * g(-\tau) * h(\tau)$$

Da i. a.  $s(\tau) \neq s(-\tau) \Rightarrow [s(\tau) \star g(\tau)] \star h(\tau) \neq s(\tau) \star [g(\tau) \star h(\tau)]$

## c) Distributiv: Ja

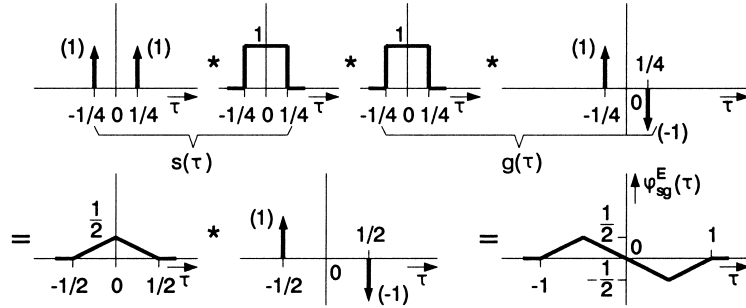
$$g(\tau) \star [s(\tau) + h(\tau)] = g(-\tau) * [s(\tau) + h(\tau)]$$

$$= [g(-\tau) * s(\tau)] + [g(-\tau) * h(\tau)] = [g(\tau) \star s(\tau)] + [g(\tau) \star h(\tau)]$$

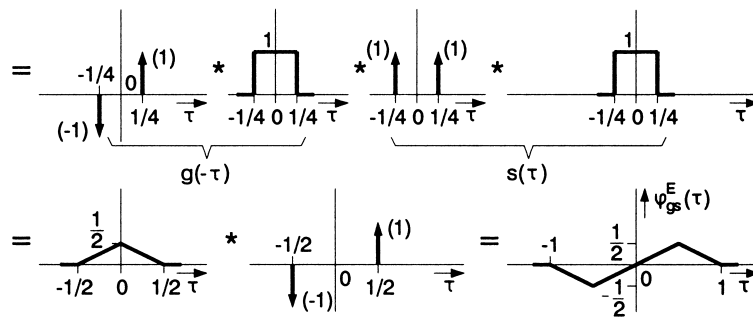
**4.6** Wegen  $s(t) \star g(t) = s(-t) * g(t)$  haben die Korrelationsfunktion und das Faltungsprodukt die gleiche Dauer  $T_{\text{ges}} = T_1 + T_2$



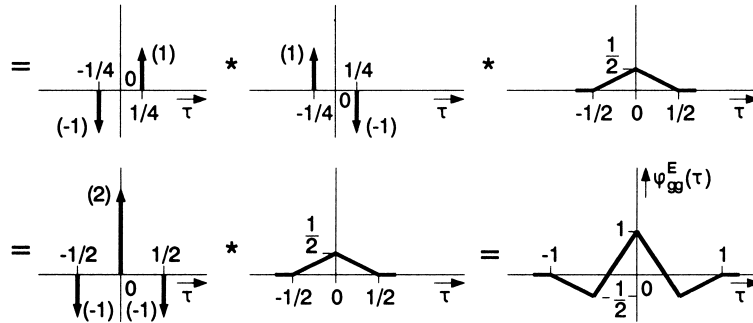
4.7  $\varphi_{sg}^E(\tau) = s(-\tau) * g(\tau) = s(\tau) * g(\tau)$  wegen  $s(-\tau) = s(\tau)$



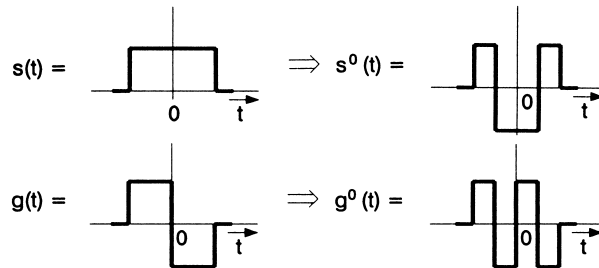
$\varphi_{gs}^E(\tau) = g(-\tau) * s(\tau)$



$\varphi_{gg}^E(\tau) = g(-\tau) * g(\tau)$



4.8



$s \perp g, s \perp s^0, s \perp g^0, g \perp s, g \perp s^0, g \perp g^0$

Da jeweils  $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$

(vgl. Aufgabe 4.21: Walsh-Funktionen)

4.9 a)  $s(t) = e^{-\pi t^2} \circ \bullet S(f) = e^{-\pi f^2}$   
 $\varphi_{ss}^E(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) = e^{-\pi(-\tau)^2} * e^{-\pi\tau^2} = e^{-\pi\tau^2} * e^{-\pi\tau^2}$   
 $\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi\tau^2/2}$   
↑  
Aufg. 2.8

$$|S(f)|^2 = e^{-2\pi f^2} \Rightarrow E = \varphi_{ss}^E(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)  $s(t) = \Lambda(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) \circ \bullet S(f) = \text{si}^2(\pi f)$   
 $\varphi_{ss}^E(\tau) = \Lambda(-\tau) * \Lambda(\tau) = \Lambda(\tau) * \Lambda(\tau)$

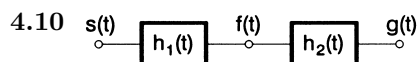


$$|S(f)|^2 = \text{si}^4(\pi f), \quad E = \int_{-1}^1 \Lambda^2(t) dt = 2 \int_0^1 (1-t)^2 dt = 2/3$$

c)  $s(t) = \text{si}(\pi t) \circ \bullet S(f) = \text{rect}(f)$   
 $\varphi_{ss}^E(\tau) = \text{si}(-\pi\tau) * \text{si}(\pi\tau) = \text{si}(\pi\tau) * \text{si}(\pi\tau) = \text{si}(\pi\tau)$



$$|S(f)|^2 = \text{rect}(f), \quad E = \varphi_{ss}^E(0) = 1$$



$$s(t) * h_1(t) = f(t), \quad f(t) * h_2(t) = g(t)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{fg}^E(\tau) &= f(\tau) * g(\tau) = f(-\tau) * f(\tau) * h_2(\tau) \\ &= s(-\tau) * h_1(-\tau) * s(\tau) * h_1(\tau) * h_2(\tau) \\ &= [s(-\tau) * s(\tau)] * [h_1(-\tau) * h_1(\tau)] * h_2(\tau) \\ &= \varphi_{ss}^E(\tau) * \varphi_{h_1 h_1}^E(\tau) * h_2(\tau) \end{aligned}$$

4.11  $s(t) = \delta(t) + \delta(t - T) \circ \bullet S(f) = 1 + e^{-j2\pi f T}$   
 $\varphi_{ss}^E(\tau) = [\delta(-\tau) + \delta(-\tau - T)] * [\delta(\tau) + \delta(\tau - T)]$   
 $= [\delta(\tau) + \delta(\tau + T)] * [\delta(\tau) + \delta(\tau - T)]$   
 $= \delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau + T - T)$   
 $= 2\delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau - T)$



$$|S(f)|^2 = 2 + 2 \cos(2\pi f T)$$

4.12  $\varphi_{ss}^E(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \varphi_{ss}^E(\tau) * \frac{1}{\pi\tau}$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}^E(\tau - u) \cdot \frac{1}{\pi u} du = \hat{\varphi}_{ss}^E(\tau)$   
 $\varphi_{ss}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}^E(u) \cdot \frac{1}{\pi u} du$

im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi_{ss}^E(u) \frac{1}{\pi u} du \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi_{ss}^E(u) \frac{1}{\pi u} du \right] = 0$$

(da  $\varphi_{ss}^E(u)$  gerade und  $\frac{1}{\pi u}$  ungerade)

$\Rightarrow s(t)$  und  $\hat{s}(t)$  sind orthogonal.

**4.13** Es gilt:  $\varphi_{sg}^E(\tau) = \varphi_{ss}^E(\tau) * h(\tau)$   
 $\uparrow$   
nach Aufg. 4.10

$$\text{mit } s(t) = \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow \varphi_{ss}^E(\tau) = T \cdot \text{si}\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

$$\varphi_{sg}^E(\tau) = \varphi_{ss}^E(\tau) * \delta(\tau - nT) = T \cdot \text{si}\left(\pi \frac{\tau - nT}{T}\right)$$

$$\varphi_{sg}^E(0) = T \cdot \text{si}(-n\pi) = 0, \text{ falls } n \neq 0 \Rightarrow s(t) \text{ und } g(t)$$

sind orthogonal

**4.14** Nach 2.20 gilt

$$|G(f)| \leq \frac{1}{|(2\pi f)^n|} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n}{dt^n} g(t) \right| dt$$

$$\text{für } n = 0 \Rightarrow |G(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$$

$$\text{mit } g(t) = \varphi_{ss}^E(t) \circ \bullet G(f) = |S(f)|^2$$

$$\Rightarrow |S(f)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{ss}^E(\tau)| d\tau$$

$$\mathbf{4.15} \quad \varphi_{sg}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt$$

$$|\varphi_{sg}^E(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t+\tau)dt$$

$= E_s \cdot E_g$   $\uparrow$  Aufg. 4.1

$$E_s = \varphi_{ss}^E(0), \quad E_g = \varphi_{gg}^E(0) \Rightarrow |\varphi_{sg}^E(\tau)| \leq \sqrt{\varphi_{ss}^E(0) \cdot \varphi_{gg}^E(0)}$$

**4.16** Nach 4.9 gilt

$$\phi_{sg}^E(f) = S^*(f) \cdot G(f) \Rightarrow \phi_{sg}^E(0) = S^*(0) \cdot G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{sg}^E(\tau) d\tau$$

Außerdem gilt:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt, \quad G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$$

Da  $s(t)$  reell ist, folgt  $S^*(0) = S(0)$

$$\Rightarrow \phi_{sg}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{sg}^E(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = S(0) \cdot G(0)$$

**4.17**  $u(t) = s(t) \pm g(t)$

$$\begin{aligned} \varphi_{uu}^E(\tau) &= u(-\tau) * u(\tau) = [s(-\tau) \pm g(-\tau)] * [s(\tau) \pm g(\tau)] \\ &= \varphi_{ss}^E(\tau) + \varphi_{gg}^E(\tau) \pm (\varphi_{sg}^E(\tau) + \varphi_{gs}^E(\tau)) \end{aligned}$$

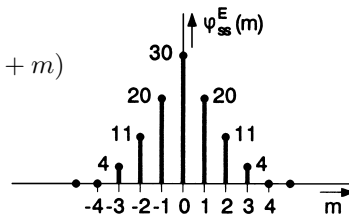
$$\begin{aligned} E_u &= \varphi_{uu}^E(0) = \varphi_{ss}^E(0) + \varphi_{gg}^E(0) \pm (\varphi_{sg}^E(0) + \varphi_{gs}^E(0)) \\ &= E_s + E_g \pm 2\varphi_{sg}^E(0) \end{aligned}$$

$$E_u = E_s + E_g \quad \text{für} \quad \varphi_{sg}^E(0) = 0$$

**4.18**  $\varphi_{ss}^E(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) = s(\tau) * s(-\tau)$

$$\varphi_{ss}^E(m) = s(m) * s(-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)s(n+m)$$

Lösung siehe Aufgabe 3.13

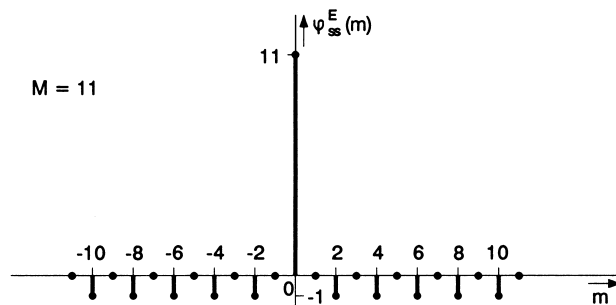
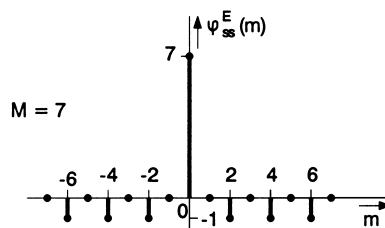
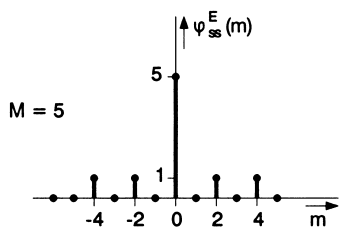


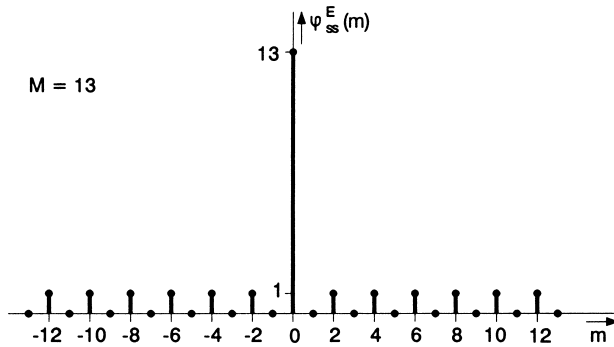
**4.19** Beispiel:  $M = 2$

$$s(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ss}^E(m) &= s(-m) * s(m) = [\delta(-m) - \delta(-m-1)] * [\delta(m) - \delta(m-1)] \\ &= [\delta(m) - \delta(m+1)] * [\delta(m) - \delta(m-1)] \\ &= 2\delta(m) - \delta(m-1) - \delta(m+1) \end{aligned}$$

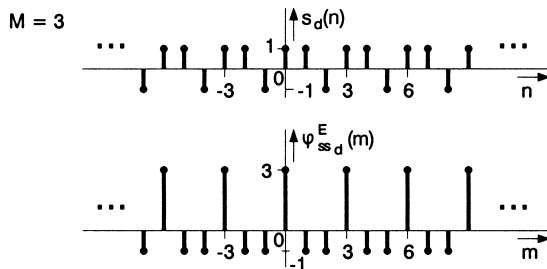
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(n) = M = 2$$





4.20 Nach (4.36) gilt:

$$\varphi_{ss_d}^E(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_d(n) \cdot s_d(n+m), \quad \text{für } m = 0, \dots, M-1$$



- 4.21 a)  $s_0(n) = + - + - + - + -$   
 $s_1(n) = + + - - + + - -$   
 $s_2(n) = + + + + - - - -$   
 $s_3(n) = + + + + + + + +$

orthogonal, da  $\sum_{n=0}^{M-1} s_i(n) s_j(n) = 0$  für  $i \neq j$

evident, da bei jedem Paar genau die Hälfte der Elemente vorzeichenleich ist.

- b)  $s_0(n) \cdot s_1(n) = + - - + + - - +$   
 $s_0(n) \cdot s_2(n) = + - + - - + - +$   
 $s_1(n) \cdot s_2(n) = + + - - - - + +$   
 $s_0(n) \cdot s_1(n) \cdot s_2(n) = + - - + - + + -$

Anzahl der Walsh-Folgen =  $M$ .

Die Produktfolgen sind orthogonal, da

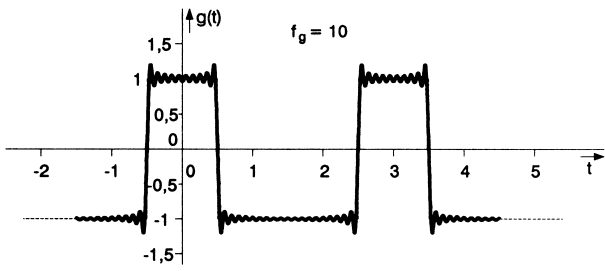
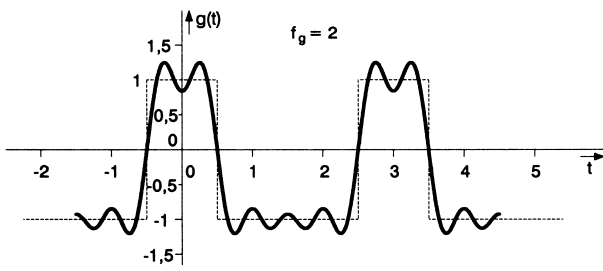
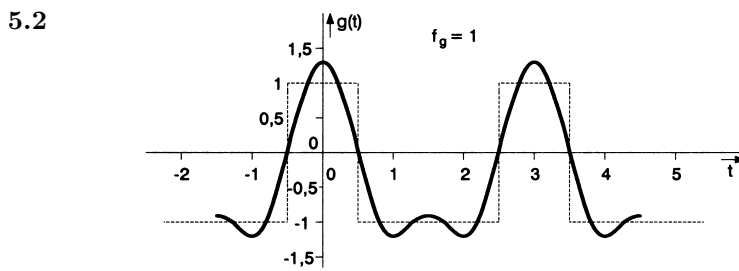
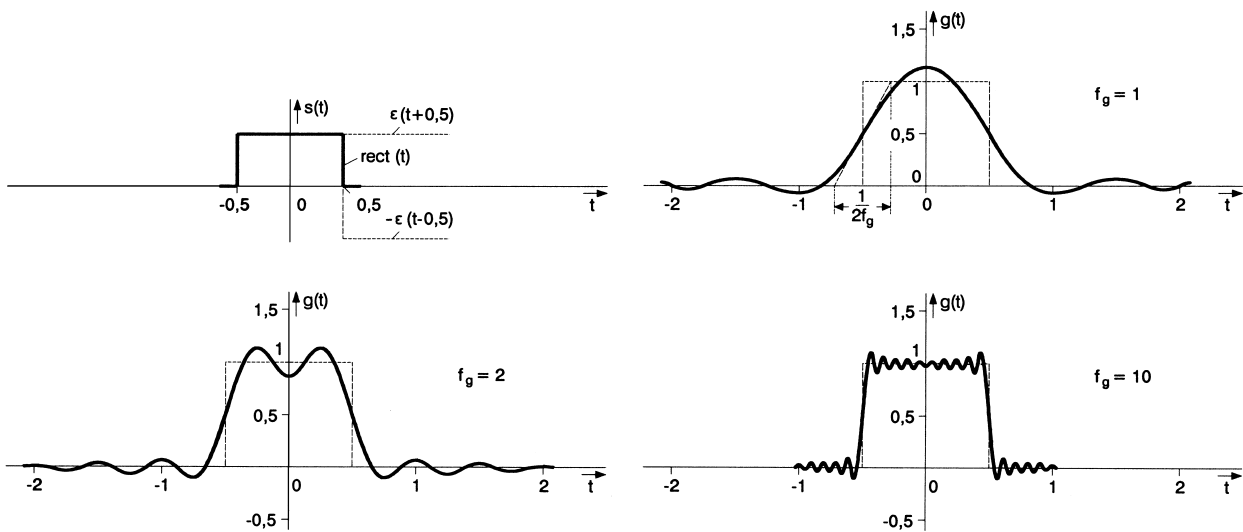
$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{M-1} [s_i(n) \cdot s_j(n)] \cdot [s_i(n) \cdot s_k(n)] \quad \text{und mit } s_j(n) \cdot s_i(n) = 1 \\ & = \sum_{n=0}^{M-1} s_j(n) \cdot s_k(n) \quad \text{für } j \neq k. \end{aligned}$$

Ersetzt man die Folgeelemente  $\pm 1$  durch positive bzw. negative Rechteckimpulse, dann erhält man die Walsh-Funktionen nach Abb. 7.14a. Die durch die Folgeelemente gebildeten orthogonalen Matrizen der Ordnung  $M$  werden auch Hadamard-Matrizen genannt. Hadamard-Matrizen existieren also für alle

Ordnungen  $M = 2^r$ , weiter auch für sehr viele Ordnungen  $M = 4a$  ( $a = 1, 2, 3, \dots$ ). Die zugeordneten Funktionen werden daher auch Hadamard-Walsh-Folgen bzw. -Funktionen genannt (Lüke, 1992).

### Kapitel 5

5.1  $s(t) = \text{rect}(t)$   
 $= \varepsilon(t + \frac{1}{2}) - \varepsilon(t - \frac{1}{2})$   
 $\Rightarrow g(t) = h_\varepsilon(t + \frac{1}{2}) - h_\varepsilon(t - \frac{1}{2})$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi 2f_g(t + \frac{1}{2})] - \{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi 2f_g(t - \frac{1}{2})] \}$   
 $= \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi 2f_g(t + \frac{1}{2})] - \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi 2f_g(t - \frac{1}{2})]$

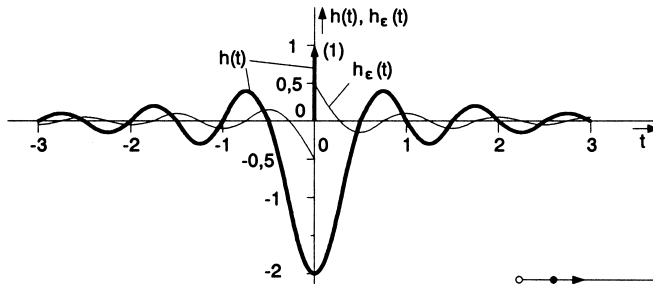


5.3  $H_{\text{HP}}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) = 1 - H_{\text{TP}}(t)$

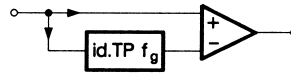


$h(t) = \delta(t) - 2f_g \text{si}(\pi 2f_g t) = \delta(t) - h_{\text{TP}}(t)$

$$h_{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi 2 f_g t) = \varepsilon(t) - h_{\varepsilon \text{TP}}(t)$$

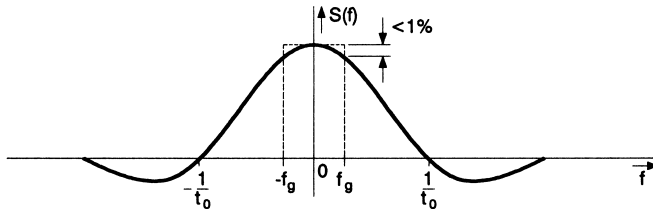


Blockschaltbild eines idealen Hochpasses:



5.4 Bestimmung von  $t_0$  für das Rechtecksignal:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad \circ \bullet \quad S(f) = t_0 \text{si}(\pi f t_0)$$



$$\left| \frac{S(f_g) - S(0)}{S(0)} \right| < 0,01 \Rightarrow 1 - \text{si}(\pi f_g t_0) < 0,01 \quad (1)$$

Mit  $\text{si}(x) = \frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)$  für  $x \ll 1$  ergibt sich:

$$\frac{\pi^2 f_g^2 t_0^2}{6} < 0,01 \Rightarrow t_0 < 19,49 \mu\text{s}$$

Für den Dreieckimpuls  $s(t) = \Lambda\left(\frac{t}{t_0/2}\right)$  ergibt sich:

$$s(t) = \Lambda\left(\frac{t}{t_0/2}\right) \quad \circ \bullet \quad S(f) = \frac{t_0}{2} \text{si}^2(\pi f_g t_0/2)$$

aus (1)  $\Rightarrow 1 - \text{si}^2(\pi f_g t_0/2) < 0,01$  bzw.  $\text{si}^2(\pi f_g t_0/2) > 0,99$

$$\frac{\pi^2 f_g^2 t_0^2}{4 \cdot 6} < 1 - \sqrt{0,99} \Rightarrow t_0 < 27,6 \mu\text{s}$$

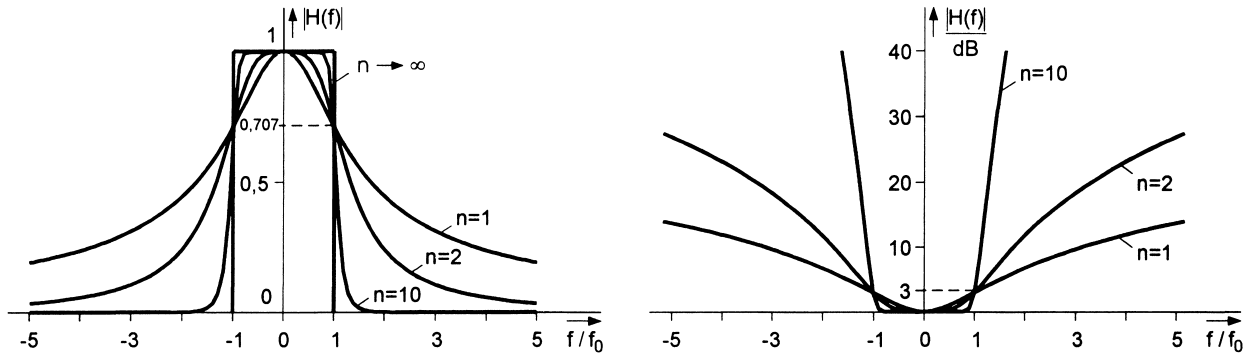
5.5 a)  $|H(f)| = 1/\sqrt{1 + (f/f_0)^{2n}} \Rightarrow |H(f_0)| = 1/\sqrt{2}$   
 Dämpfungsmaß:  $a(f_0) = -20 \lg |H(f_0)| = 3 \text{ dB}$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n} = \begin{cases} 0 & |f| < f_0 \\ 1 & |f| = f_0 \\ \infty & |f| > f_0 \end{cases}$$

somit

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & |f| < f_0 \\ 1/\sqrt{2} & |f| = f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \text{ bis auf Nullfunktionen bei } \pm f_0$$



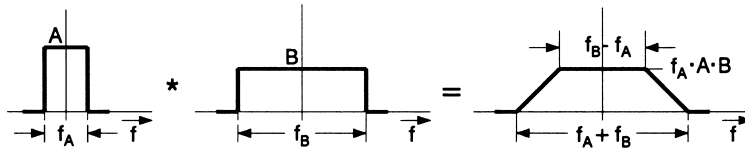
c) mit  $T = RC$  in (2.23a)

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

$$\Rightarrow n = 1, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

d)  $a(f) = -20 \lg |H(f)| \text{ dB} \Rightarrow |H(f)| = 10^{-a(f)/20 \text{ dB}}$   
 $\Rightarrow |H(0, 8f_0)| = [1 + (0,8)^{2n}]^{-1/2} > 0,891$   
 $n > 3,028 \Rightarrow n = 4$

5.6 Für  $f_A \leq f_B$  (s. Aufgabe 1.6)



Mit der Skizze ergibt sich:

$$f_2 = \frac{1}{2}(f_A + f_B) \quad f_1 = \frac{1}{2}(f_B - f_A)$$

$$\Rightarrow f_B = f_1 + f_2 \text{ und } f_A = f_2 - f_1$$

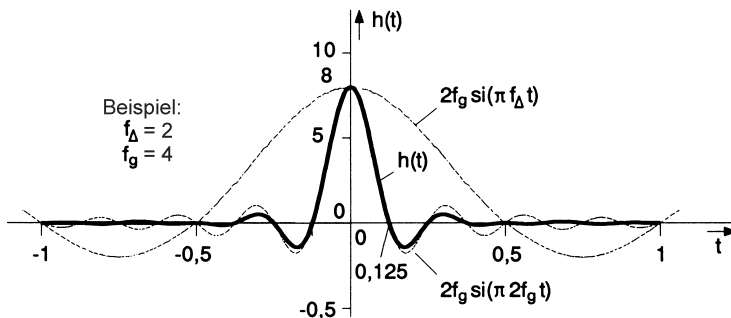
$$A \cdot B \cdot f_A = 1 \Rightarrow AB = 1/f_A = 1/(f_2 - f_1)$$

$$\Rightarrow H(f) = \left[ \frac{1}{f_2 - f_1} \text{rect} \left( \frac{f}{f_2 - f_1} \right) \right] * \text{rect} \left( \frac{f}{f_1 + f_2} \right)$$

Mit  $f_\Delta = f_2 - f_1$  und  $f_g = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$  ergibt sich:

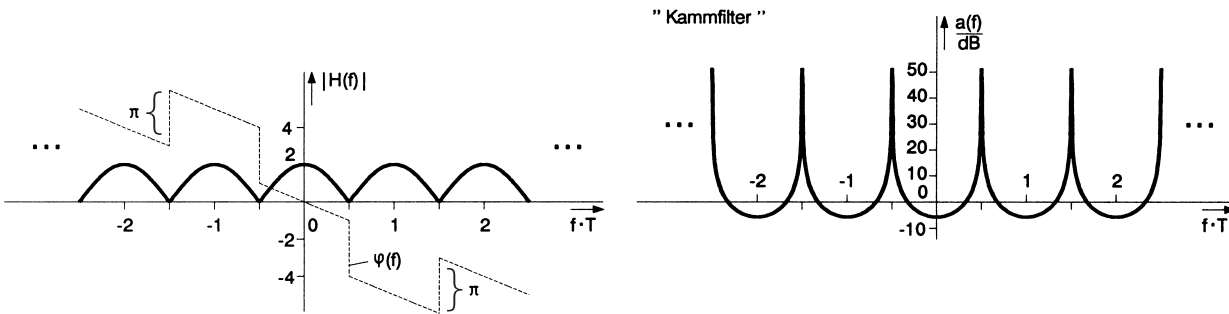
$$H(f) = \left[ \frac{1}{f_\Delta} \text{rect} \left( \frac{f}{f_\Delta} \right) \right] * \text{rect} \left( \frac{f}{2f_g} \right) \bullet \circ h(t) =$$

$$= \text{si}(\pi f_\Delta t) \cdot 2f_g \text{si}(\pi 2f_g t)$$

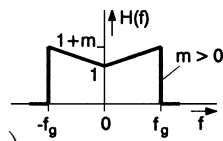




5.7  $h(t) = \delta(t) + \delta(t - T) \circ \bullet H(f)$   
 $= 1 + e^{-j2\pi fT} = 2e^{-j\pi fT} \cos(\pi fT)$   
 $\Rightarrow |H(f)| = 2|\cos(\pi fT)|$   
 $\varphi(f) = -\pi fT + \begin{cases} \pm\pi & \text{für } \cos(\pi fT) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   
 $a(f) = -20 \lg |H(f)| \text{ dB} = -20 \lg |2 \cos(\pi fT)| \text{ dB}$   
 Phasensprünge des Phasenspektrums  $\varphi(f)$  betragen  $\pm \pi$ .

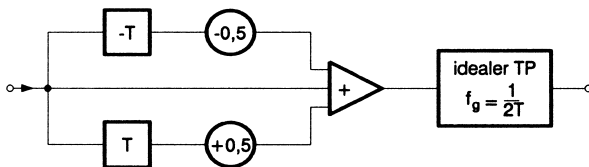


5.8  $H(f) = \left(1 + m \frac{|f|}{f_g}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$   
 oder umgeformt:  
 $H(f) = (1 + m) \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) - m \cdot \Lambda\left(\frac{f}{f_g}\right)$

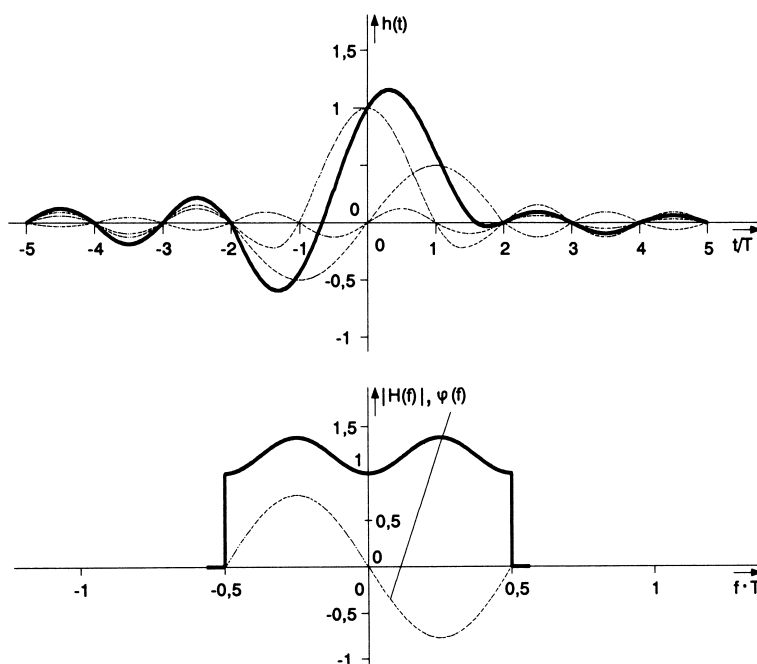


$h(t) = (1 + m)2f_g \text{si}(\pi 2f_g t) - mf_g \text{si}^2(\pi f_g t)$   
 Mit  $T = \frac{1}{2f_g}$  ergibt sich für die Echoamplituden:  
 $h(nT) = \frac{1}{T} \left[ (1 + m) \text{si}(\pi n) - \frac{m}{2} \text{si}^2\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right]$

5.9 Blockschaltbild des Übertragungssystems:



$h(t) = \left[-\frac{1}{2}\delta(t + T) + \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - T)\right] * \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right)$   
 $H(f) = [1 - j \sin(2\pi T f)] \cdot T \cdot \text{rect}(fT)$   
 $|H(f)| = \sqrt{1 + \sin^2(2\pi T f)} \cdot T \cdot \text{rect}(fT)$   
 $\varphi(f) = \arctan\left(\frac{-\sin(2\pi T f)}{1}\right) = -\arctan[\sin(2\pi T f)]$



5.10 a)  $h_0(t) = \text{si}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$  und  $h_1 = a \text{si}\left(\pi \frac{t-T}{T}\right)$

$$\frac{d}{dt}h_0(t) = \frac{\frac{\pi t}{T} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{\pi t}{T}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{T}$$

$$\frac{d}{dt}h_1(t) = a \frac{\pi \frac{t-T}{T} \cos\left(\pi \frac{t-T}{T}\right) - \sin\left(\pi \frac{t-T}{T}\right)}{\left(\pi \frac{t-T}{T}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{T}$$

für  $t = 2T$  folgt

$$h'_0(2T) = \frac{1}{2T} \text{ und } h'_1(2T) = -\frac{a}{T}$$

mit  $h'_0(2T) \stackrel{!}{=} -h'_1(2T)$  ergibt sich:  $a = \frac{1}{2}$ .

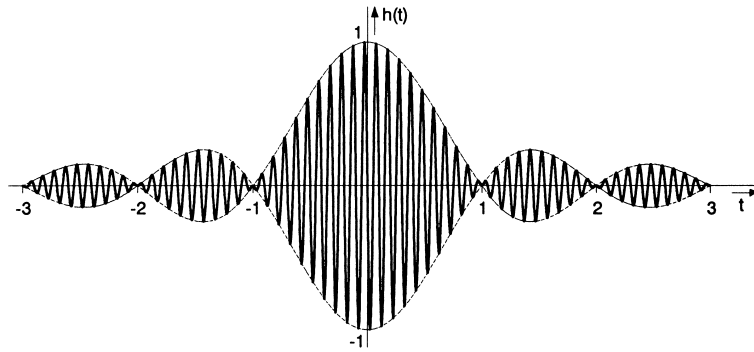
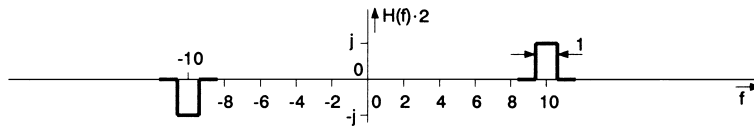
b)  $s(t) = 0,5\delta(t+T) + \delta(t) + 0,5\delta(t-T)$

5.11  $h(t) = \text{Re}\{h_T(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \text{Re}\{j \text{si}(\pi t) \cdot e^{j20\pi t}\}$   
 $= -\text{si}(\pi t) \cdot \sin(20\pi t)$



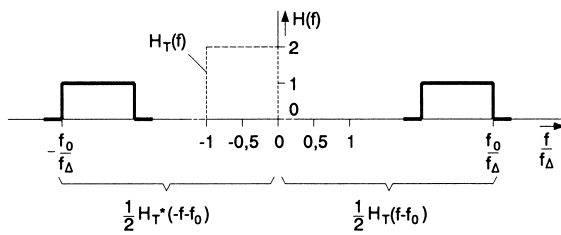
$$H(f) = \text{rect}(f) * \left[ \frac{j}{2}\delta(f-10) - \frac{j}{2}\delta(f+10) \right]$$

$$= \frac{1}{2}H_T(f-f_0) + \frac{1}{2}H_T^*(-f-f_0) = \frac{j}{2}\text{rect}(f-10) - \frac{j}{2}\text{rect}(f+10)$$



5.12 Es gilt:

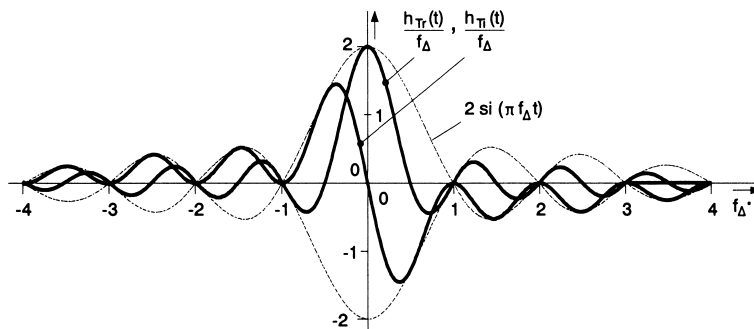
$$H(f) = \frac{1}{2}H_T(f - f_0) + \frac{1}{2}H_T^*(-f - f_0) \text{ wobei } H_T(f) = 0 \forall f < -f_0$$



$$H_T(f) = 2[H(f) \cdot \varepsilon(f)] * \delta(f + f_0) = 2 \text{rect} \left( \frac{f + f_\Delta/2}{f_\Delta} \right)$$



$$\begin{aligned} h_T(t) &= 2f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta t) \cdot e^{-j\pi f_\Delta t} \\ h_{T_r}(t) &= \text{Re}\{h_T(t)\} = 2f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta t) \cos(\pi f_\Delta t) \\ h_{T_i}(t) &= \text{Im}\{h_T(t)\} = -2f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta t) \sin(\pi f_\Delta t) \\ h(t) &= \text{Re}\{2f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta t) e^{-j\pi f_\Delta t} e^{j2\pi f_0 t}\} \\ &= 2f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta t) \cos \left[ 2\pi \left( f_0 - \frac{f_\Delta}{2} \right) t \right]. \end{aligned}$$

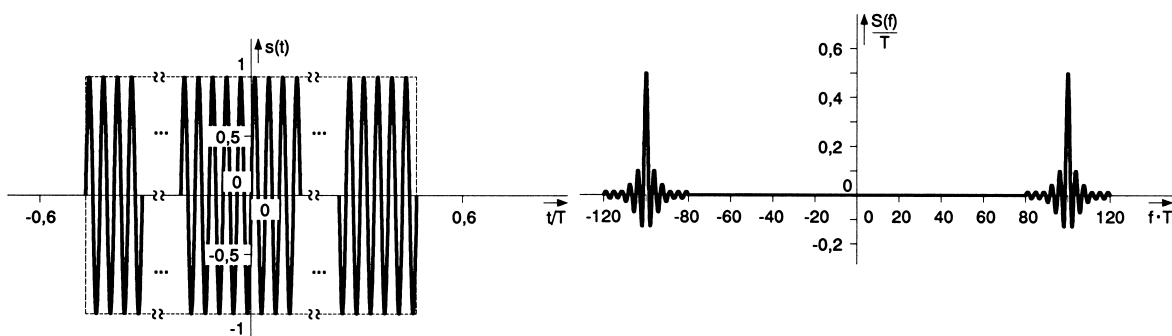


5.13  $s(t) = \text{Re} \left\{ \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \cdot e^{j2\pi(100/T)t} \right\} = \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \cdot \cos \left( 200 \frac{\pi t}{T} \right)$



$$S(f) = T \text{si}(\pi f T) * \left[ \frac{1}{2} \delta \left( f + \frac{100}{T} \right) + \frac{1}{2} \delta \left( f - \frac{100}{T} \right) \right]$$

$$= \frac{T}{2} \text{si}[\pi(fT + 100)] + \frac{T}{2} \text{si}[\pi(fT - 100)]$$



5.14 ES gilt:

$$s(t) = \text{Re}\{s_T(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \text{ für reelle BP-Signale, wobei}$$

$$s_+(t) = s_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad \text{---} \bullet \quad S_+(f) = S_T(f - f_0)$$

Mit Bedingung (5.31)  $S_T(f) = 0$  für  $f \leq -f_0$  ergibt sich:

$$S_+(f) = 0 \quad \text{für} \quad f \leq 0$$

Für das äquivalente Tiefpassamplitudendichtespektrum gilt:

$$S_T(f) = 2[S(f) \cdot \varepsilon(f)] * \delta(f + f_0)$$

$$\Rightarrow S_+(f) = S_T(f - f_0) = 2S(f) \cdot \varepsilon(f)$$

mit  $2\varepsilon(f) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \delta(t) + \frac{j}{\pi t}$  ergibt sich:

$$s_+(t) = s(t) + j \left( \frac{1}{\pi t} * s(t) \right) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

5.15  $s_2(t) = -s(t) \sin(2\pi f_0 t)$

$$S_2(f) = -S(f) * \left[ \frac{j}{2} \delta(f + f_0) - \frac{j}{2} \delta(f - f_0) \right]$$

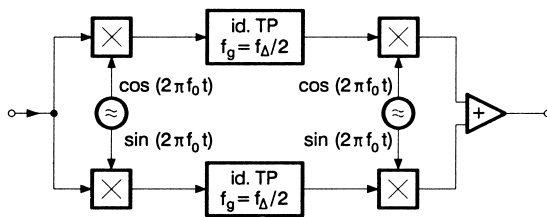
Mit  $S(f) = \frac{1}{2} S_T(f - f_0) + \frac{1}{2} S_T^*(-f - f_0)$  (5.30)

Durch anschließende Tiefpassfilterung fallen die Spektren bei  $\pm 2f_0$  weg, so daß folgt:

$$-\frac{j}{4} S_T(f) + \frac{j}{4} S_T^*(-f)$$

$$-\frac{j}{4} s_T(t) + \frac{j}{4} s_T^*(t) = \frac{j}{4} [s_T^*(t) - s_T(t)] = \frac{1}{2} s_{Ti}(t).$$

5.16



5.17 in (5.52)  $f_0 = 0$  einsetzen

$$\Rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(nT) \text{si} \left[ \pi \frac{t - nT}{T} \right] \text{ mit } T = \frac{1}{f_\Delta} \text{ vergl. mit (3.8)!}$$

5.18 Da mit  $g(t) = s_1(t) + s_2(t)$  auch für die äquivalenten TP-Signale gilt:

$g_T(t) = s_{1T}(t) + s_{2T}(t)$ , ergibt sich:

$$\begin{aligned} |g_T(t)|^2 &= g_T(t) \cdot g_T^*(t) \\ &= [s_{1T}(t) + s_{2T}(t)] \cdot [s_{1T}^*(t) + s_{2T}^*(t)] \\ &= |s_{1T}(t)|^2 + |s_{2T}(t)|^2 + s_{1T}(t) \cdot s_{2T}^*(t) + s_{1T}^*(t) \cdot s_{2T}(t) \\ &= |s_{1T}(t)|^2 + |s_{2T}(t)|^2 + 2 \text{Re}\{s_{1T}(t) \cdot s_{2T}^*(t)\} \\ &= |s_{1T}(t)|^2 + |s_{2T}(t)|^2 + 2|s_{1T}(t)||s_{2T}(t)| \cos(\Theta_{1T} - \Theta_{2T}) \end{aligned}$$

5.19 Idee: Man bestimme die äquivalenten Tiefpassstoßantworten zu  $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  und berechne  $g_1(t)$  und  $g_2(t)$  als Funktion der entsprechenden äquivalenten Tiefpasssignale.

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \text{Re}\{h_{Tr}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \Rightarrow h_{1T}(t) = h_{Tr}(t) \\ h_2(t) &= \text{Re}\{-j h_{Tr}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \Rightarrow h_{2T}(t) = -j h_{Tr}(t) \\ g_1(t) &= \text{Re}\{g_{1T}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{[s_T(t) * h_{1T}(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{[s_T(t) * h_{Tr}(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}$$

ebenso:

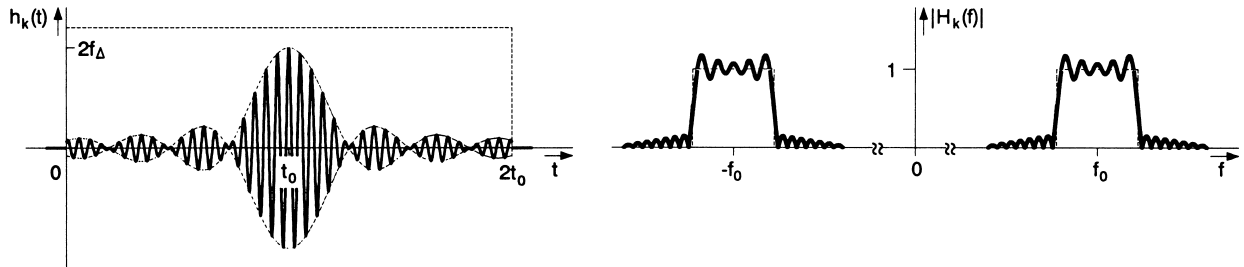
$$\begin{aligned}
 g_2(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\langle \{s_{\text{T}}(t) * [-j h_{\text{Tr}}(t)]\} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{[-j s_{\text{T}}(t) * h_{\text{Tr}}(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\{[s_{\text{T}}(t) * h_{\text{Tr}}(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t}\}, \quad \text{da } \operatorname{Re}\{-jz\} = \operatorname{Im}\{z\}. \\
 g(t) &= \sqrt{g_1^2(t) + g_2^2(t)} \\
 &= \left| \frac{1}{2} [s_{\text{T}}(t) * h_{\text{Tr}}(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right| = \frac{1}{2} |s_{\text{T}}(t) * h_{\text{Tr}}(t)| = |g_{\text{T}}(t)|
 \end{aligned}$$

Für  $t = 0$  gilt:

$$\begin{aligned}
 g_1(0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{s_{\text{T}}(t) * h_{\text{Tr}}(t)\}|_{t=0} = \operatorname{Re}\{g_{\text{T}}(t)\}|_{t=0} \\
 g_2(0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\{s_{\text{T}}(t) * h_{\text{Tr}}(t)\}|_{t=0} = \operatorname{Im}\{g_{\text{T}}(t)\}|_{t=0}
 \end{aligned}$$

**5.20**  $h_k(t) = \left[ f_{\Delta} \operatorname{si}(\pi f_{\Delta} t) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2t_0}\right) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) \right] * \delta(t - t_0)$

$$\begin{aligned}
 H_k(f) &= \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_{\Delta}}\right) * [2t_0 \operatorname{si}(2\pi t_0 f)] * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \right\} \\
 &\quad \cdot e^{-j2\pi t_0 f}
 \end{aligned}$$



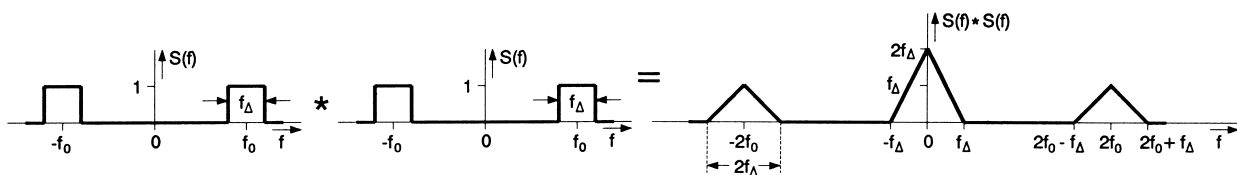
**5.21**  $s^2(t) \circ \bullet S(f) * S(f)$  damit verdoppelt sich die Grenzfrequenz  
 $s^n(t) \circ \bullet S(f) * S(f) * \dots * S(f)$  damit wird die Grenzfrequenz  
 $n$  mal so groß.

Ist  $s(t)$  ein ideales Bandpaßsignal, so gilt:

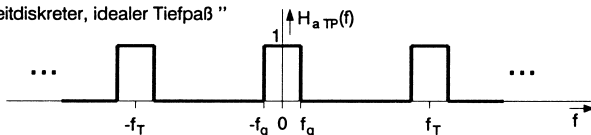
$$\begin{aligned}
 s(t) &= f_{\Delta} \operatorname{si}(\pi f_{\Delta} t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) \\
 S(f) &= \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_{\Delta}}\right) * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \\
 s^2(t) &= 2f_{\Delta}^2 \operatorname{si}^2(\pi f_{\Delta} t) \cdot [1 + \cos(4\pi f_0 t)]
 \end{aligned}$$

$$S(f) * S(f) = 2f_{\Delta} \Lambda\left(\frac{f}{f_{\Delta}}\right) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f - 2f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + 2f_0)\right]$$

beziehungsweise:



5.22 "zeitdiskreter, idealer Tiefpaß"



$$H_{aTP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_T)$$

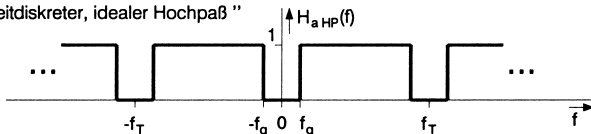


$$h_{aTP}(t) = 2f_g \text{si}(\pi 2f_g t) \cdot \frac{1}{|f_T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_T}\right) \text{ mit } f_T = \frac{1}{T}$$

$$= 2f_g T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{si}(2\pi f_g T n) \delta(t - nT)$$

$$\Rightarrow h_{TP}(n) = 2f_g T \text{si}(2\pi f_g T n)$$

"zeitdiskreter, idealer Hochpaß"

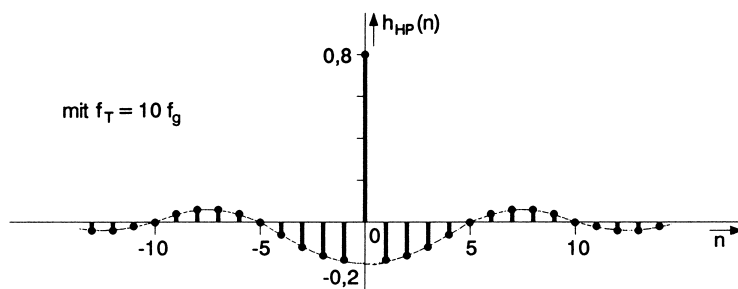


$$H_{aHP}(f) = 1 - H_{aTP}(f)$$

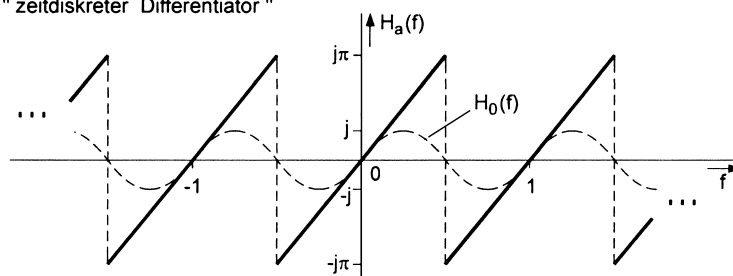


$$h_{aHP}(t) = \delta(t) - h_{aTP}(t)$$

$$\Rightarrow h_{HP}(n) = \delta(n) - 2f_g T \text{si}(2\pi f_g T n)$$



5.23 a) "zeitdiskreter Differentiator"



b)  $H_a(f) = [j2\pi f \operatorname{rect}(f)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n)$



$$\begin{aligned} h_a(t) &= \left[ \frac{d}{dt} \operatorname{si}(\pi t) \right] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \\ &= \frac{\pi^2 t \cos(\pi t) - \pi \cdot \sin(\pi t)}{\pi^2 t^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi n \cdot \cos(\pi n) - \sin(\pi n)}{\pi n^2} \cdot \delta(t - n) \end{aligned}$$

mit

$$h(0) = \frac{d}{dt} \operatorname{si}(\pi t)|_{t=0} = \int_{-1/2}^{1/2} H_a(f) df = 0$$

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n} \delta(t - n) & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{\cos(\pi n)}{n} = \frac{(-1)^n}{n} & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

c)  $h_0 = \frac{1}{2} \delta(n + 1) - \frac{1}{2} \delta(n - 1)$



$$H_0(f) = j \sin(2\pi f)$$

also Näherung an  $H_a(f)$  für  $|f| \ll 1$  (s. Abbildung)

**5.24**  $H(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) \bullet \text{---} \circ h(t) = 2f_g \operatorname{si}(\pi 2f_g t)$

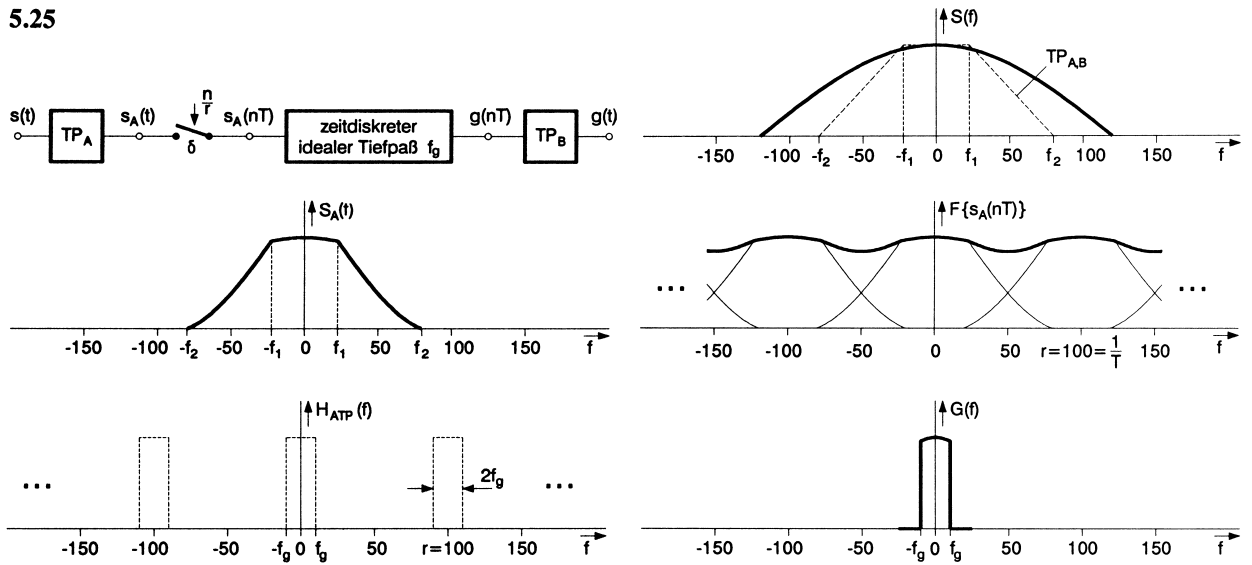
Die erste Nullstelle liegt bei  $t_0 = \frac{1}{2f_g}$ .

Die Anzahl der diskreten Werte zwischen Hauptmaximum bei  $t = 0$  und 1. Nulldurchgang bei  $t_0 = \frac{1}{2f_g}$  bei gegebener Rate  $r$  beträgt:

$$N = \frac{t_0}{1/r} = \frac{r}{2f_g} \Rightarrow \text{a) } N = 5 \text{ b) } N = 100$$



5.25



$$\Rightarrow f_1 > f_g \text{ und } f_2 < r - f_g = \frac{1}{T} - f_g$$

Kapitel 6

6.1 Scharmittelwerte:  $\mathcal{E}\{s(t_1)\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s(t_1)$

- a) Amplitudenwert durch Münze festgelegt  
 $\Rightarrow \text{Prob}[0 \text{ V}] = \text{Prob}[2 \text{ V}] = 1/2$

$$\mathcal{E}\{s(t_1)\} = \frac{1}{2} \cdot 0 \text{ V} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ V} = 1 \text{ V}$$

$$\mathcal{E}\{s^2(t_1)\} = \frac{1}{2} \cdot 0 \text{ V}^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ V}^2 = 2 \text{ V}^2$$

$$\mathcal{E}\{s^3(t_1)\} = \frac{1}{2} \cdot 0 \text{ V}^3 + \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ V}^3 = 4 \text{ V}^3$$

$\mathcal{E}\{s(0) \cdot s(t_1)\} = \mathcal{E}\{s^2(t_1)\}$ , da Werte der Gleichspannung für alle Zeiten konstant

$\Rightarrow$  stationärer Prozeß

b) Zeitmittelwert:  $\overline{s(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt$

1)  $a_k = 0 \Rightarrow$  alle Zeitmittelwerte 0

2)  $a_k = 2 \text{ V} \Rightarrow \overline{s(t)} = 2 \text{ V}$

$$\overline{s^2(t)} = 4 \text{ V}^2$$

$$\overline{s^3(t)} = 8 \text{ V}^3$$

Schar- und Zeitmittelwerte stimmen nicht überein  $\Rightarrow$  nicht ergodisch

- 6.2 a) Bei einem ergodischen Prozeß sind die Zeitmittelwerte für alle Musterfunktionen untereinander gleich, wenn die Mittelwertbildung über  $T \rightarrow \infty$  erfolgt. Beim hier definierten Kurzzeitmittelwert ist dies i. a. nicht der Fall, weshalb  $m(T)$  eine Zufallsgröße ist.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \mathcal{E}\{m(T)\} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left[ \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s(t) \right] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}\{s(t)\} dt = \frac{1}{T} \mathcal{E}\{s(t)\} \int_0^T dt = \mathcal{E}\{s(t)\} = \overline{s(t)}, \text{ da } s(t) \text{ ergodisch}
 \end{aligned}$$

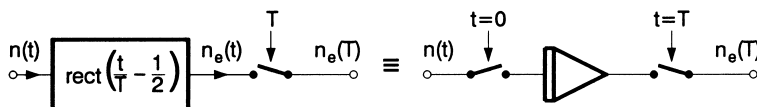
6.3 (1) Gl. (6.12) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\left\{ \sum_i a_i s_i(t_i) \right\} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left[ \sum_i a_i^k s_i(t_i) \right] \\
 &= \sum_i \left[ a_i \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s_i(t_i) \right] = \sum_i a_i \mathcal{E}\{s_i(t_i)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2) } \mu_{uv}(\tau) &= \mathcal{E}\{[u(t) - \mathcal{E}\{u(t)\}] \cdot [v(t+\tau) - \mathcal{E}\{v(t)\}]\} \\
 &= \mathcal{E}\{u(t) \cdot v(t+\tau)\} - \mathcal{E}\{u(t)\} \cdot \mathcal{E}\{v(t)\} - \mathcal{E}\{\mathcal{E}\{u(t)\} \cdot v(t+\tau)\} + \mathcal{E}\{u(t)\} \cdot \mathcal{E}\{v(t)\} \\
 &= \varphi_{uv}(\tau) - \mathcal{E}\{u(t)\} \cdot \mathcal{E}\{v(t)\}, \text{ da } \mathcal{E}\{v(t+\tau)\} = \mathcal{E}\{v(t)\} \text{ (stationär)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{6.4 } P_{\Delta} &= \mathcal{E}\{[s(t) - s(t+\tau)]^2\} \\
 &= \mathcal{E}\{s^2(t)\} + \mathcal{E}\{s^2(t+\tau)\} - 2\mathcal{E}\{s(t)s(t+\tau)\} \\
 &= P + P - 2\varphi_{ss}(\tau) \\
 \Rightarrow \varphi_{ss}(\tau) &= P - P_{\Delta}/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{6.5 } n_e(T) &= \int_0^T n(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \text{rect}\left(\frac{T-\tau-T/2}{T}\right) d\tau \\
 &= \left[ n(t) * \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \right]_{t=T}
 \end{aligned}$$



$n_e(t)$  ist stationär für jede Zeitkonstante  $T$

$$\Rightarrow \mathcal{E}\{n_e^2(t)\} = \mathcal{E}\{n_e^2(T)\} = P_T = [\varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^E(\tau)]_{\tau=0} = \left[ N_0 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) \right]_{\tau=0}$$

$P_T = N_0 \cdot T =$  Augenblicksleistung am Integratorausgang zum Zeitpunkt  $T \Rightarrow$  Ausgangsprozeß des Integrators ist nicht stationär, da Augenblicksleistung nicht konstant.

**6.6** Filter-Stoßantwort:  $h(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T}$

Übergangsfunktion:  $H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi T f}$   
 $|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi T f)^2}$

Autokorrelationsfunktion:  $\varphi_{hh}^E(\tau) = \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T}$  (s. Abschn. 4.4)

Weißes Rauschen:  $\phi_{nn}(f) = N_0$   $\varphi_{nn}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$

a)  $\phi_{gg}(f) = \phi_{nn}(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{1 + (2\pi T f)^2}$

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{gg}(f) df = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{1 + (2\pi T f)^2} df = \frac{N_0}{2T}$$

b)  $\varphi_{gg}(\tau) = \varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^E(\tau) = [N_0 \delta(\tau)] * \left[ \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T} \right] = \frac{N_0}{2T} e^{-|\tau|/T}$

$$P_g = \varphi_{gg}(0) = \frac{N_0}{2T}$$

**6.7** a)  $\varphi_{gf}(\tau) = \mathcal{E} \{g(t) \cdot f(t + \tau)\} = \mathcal{E} \{[s(t) * h_1(t)] \cdot [s(t + \tau) * h_2(t)]\}$   
 $= \mathcal{E} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) s(t - \theta) d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\mu) s(t + \tau - \mu) d\mu \right\}$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} \{s(t - \theta) s(t + \tau - \mu)\} h_1(\theta) h_2(\mu) d\theta d\mu$

Substitution:

$$\mu = \nu + \theta, d\mu = d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} \{s(t - \theta) s(t + \tau - \theta - \nu)\} h_1(\theta) h_2(\theta + \nu) d\theta d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}(\tau - \nu) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) h_2(\theta + \nu) d\theta \right] d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}(\tau - \nu) \varphi_{h_1 h_2}^E(\nu) d\nu = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1 h_2}^E(\tau) \quad \text{q.e.d.}$$

b) Orthogonal, d. h.  $\varphi_{h_1 h_2}^E(0) = 0$

$$\varphi_{gf}(0) = [\varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1 h_2}^E(\tau)]_{\tau=0} = [N_0 \delta(\tau) * \varphi_{h_1 h_2}^E(\tau)]_{\tau=0} = N_0 \varphi_{h_1 h_2}^E(0) = 0$$

c)  $g(t)$  und  $f(t)$  unkorreliert  $\Leftrightarrow \mu_{gf}(\tau) = \varphi_{gf}(\tau) - m_g \cdot m_f = 0$

$$\mu_{gf}(\tau) = \varphi_{gf}(\tau) - m_g \cdot m_f = [\varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1 h_2}^E(\tau)] - m_s^2 H_1(0) \cdot H_2(0)$$

Annahme:

$$s(t) \text{ weißes Rauschen} \Rightarrow m_s^2 = 0 \text{ und } \varphi_{ss}(\tau) = N_0\delta(\tau)$$

$$\Rightarrow \mu_{gf}(\tau) = N_0\varphi_{h_1h_2}^E(\tau) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{h_1h_2}^E(\tau) = 0 \text{ für alle } \tau \text{ bzw. } H_1^*(f) \cdot H_2(f) = 0 \text{ für alle } f \Rightarrow$$

$$\text{Filter überlappungsfrei: } |H_1(f)| \cdot |H_2(f)| = 0$$

**6.8** mit

$$h_1(t) = \delta(t), h_2(t) = h(t) \text{ folgt:}$$

$$\varphi_{gf}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1h_2}^E(\tau) \quad (\text{siehe Aufgabe 6.7a})$$



$$\phi_{gf}(f) = \phi_{ss}(f)H_1^*(f) \cdot H_2(f) = N_0 \cdot 1 \cdot H(f) = N_0 \cdot H(f)$$



$$\varphi_{gf}(\tau) = N_0 \cdot h(\tau)$$

**6.9**  $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \Rightarrow |H(f)|^2 = H(f)$

a)  $\phi_{gg}(f) = \phi_{ss}(f) \cdot |H(f)|^2 = N_0 \cdot H(f)$

$$= N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

b)  $m_g = N_0H(0) = 0$

$$\mathcal{E}\{g^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{gg}(f)df = 2N_0f_\Delta$$

$$\sigma_g^2 = \mathcal{E}\{g^2(t)\} - m_g^2 = 2N_0f_\Delta$$

c)  $\phi_{gg}(f) \bullet \text{---} \circ \phi_{gg}(\tau) = N_0h(\tau) = N_0f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta \tau) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 \tau)$

d) siehe Aufgabe 6.8

$$\varphi_{gs}(\tau) = N_0h(\tau) = \varphi_{gg}(\tau) = N_0f_\Delta \text{si}(\pi f_\Delta \tau) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 \tau)$$

e)  $\varphi_{gf}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_{\text{TP}}h_{\text{BP}}}^E(\tau)$  nach Aufgabe 6.7a



$$\phi_{gf}(f) = N_0 \cdot H_{\text{TP}}^*(f) \cdot H_{\text{BP}}(f) = 0 \text{ (überlappungsfreie Filter!)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{gf}(\tau) = 0 \Rightarrow \mu_{gf}(\tau) = 0 \Rightarrow g(t) \text{ und } f(t) \text{ sind unkorreliert.}$$

**6.10** Rauschbandbreite  $f_R$  von Tiefpassfiltern

a) Leistung bei idealem Referenz-Tiefpass

$$\phi_{RR}(f) = N_0|H_R(f)|^2 = N_0H^2(0) \text{rect}\left(\frac{f}{2f_R}\right)$$

$$P_R = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{RR}(f)df = N_0H^2(0) \cdot 2f_R$$

mit  $P$  nach (6.38) und  $P = P_R$

$$\Rightarrow f_R = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df / (2H^2(0))$$

b) RC-Tiefpass:  $H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$

$$H(0) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = 1/(2T) \quad (\text{s. Abschn. 4.4})$$

$$\Rightarrow f_R = \frac{1}{2 \cdot 2T} = \frac{1}{4RC}$$

c) Bandpassfilter:

$$H_{\text{RBP}}(f) = \left[ |H(f_0)| \text{rect} \left( \frac{f}{f_{\Delta R}} \right) \right] * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$P_R = N_0 |H(f_0)|^2 \cdot 2f_{\Delta R}$$

mit  $P$  nach (6.38) und  $P = P_R$

$$\Rightarrow f_{\Delta R} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df / (2|H(f_0)|^2)$$

**6.11** Differentiator:  $H(f) = j2\pi f$  (s. Abschn. 2.10)

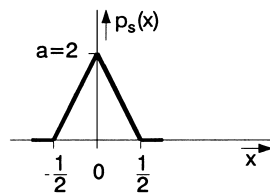
$$\phi_{gg}(f) = |H(f)|^2 \cdot \phi_{ss}(f) = (2\pi f)^2 \cdot \phi_{ss}(f)$$



$$\varphi_{gg}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \varphi_{ss}(\tau)$$

**6.12**  $p_s(x) = a\Lambda(2x)$

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} p_s(x) dx = a \cdot \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a = 2$



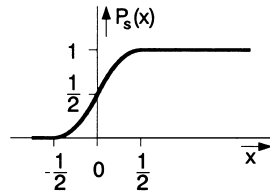
b)  $P_s(x) = \int_{-\infty}^x p_s(y) dy = \int_{-\infty}^x 2\Lambda(2y) dy$

$$-\infty < x < -\frac{1}{2} \quad P_s(x) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \quad P_s(x) = \int_{-1/2}^x p_s(y) dy = \int_{-1/2}^x (4y + 2) dy = 2(x + 0,5)^2$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \quad P_s(x) = \frac{1}{2} + \int_{-1/2}^x p_s(y) dy = \frac{1}{2} + \int_{-1/2}^x (2 - 4y) dy = 1 - 2(x - 0,5)^2$$

$$\frac{1}{2} < x < \infty \quad P_s(x) = 1$$

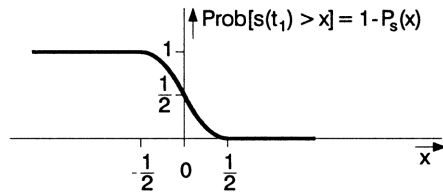


c)  $\mathcal{E}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_s(x)dx = 0$ , da  $p_s(x)$  gerade!

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{s^2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x)dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 p_s(x)dx = 2 \int_0^{1/2} x^2(2-4x)dx \\ &= \frac{1}{24} = \sigma^2 \end{aligned}$$

d)  $\text{Prob}[0 < s(t_1) \leq 0,3] = P_s(0,3) - P_s(0) = 0,42$

e)  $\text{Prob}[s(t_1) > x] = 1 - P_s(x)$



**6.13**  $\phi_{ss}(f) = \text{rect}(f) + 2\delta(f)$  und  $\phi_{gg}(f) = \Lambda(f)$

a)  $\varphi_{ss}(\tau) = \text{si}(\pi\tau) + 2$

$$m_s^2 = \varphi_{ss}(\infty) = 2 \Rightarrow m_s = \pm\sqrt{2}$$

$$P_s = \varphi_{ss}(0) = 3$$

$$\sigma_s^2 = P_s - m_s^2 = 1$$

$$\varphi_{gg}(\tau) = \text{si}^2(\pi\tau)$$

$$m_g^2 = \varphi_{gg}(\infty) = 0$$

$$\sigma_g^2 = P_g = \varphi_{gg}(0) = 1, \text{ da } m_g = 0$$

b)  ${}^k f(t) = {}^k g(t) + {}^k s(t)$

$$\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{gg}(\tau) + \varphi_{sg}(\tau) + \varphi_{gs}(\tau) \text{ siehe Aufgabe 6.4}$$

$$\text{Da } s(t) \text{ und } g(t) \text{ unkorreliert } \Rightarrow \varphi_{gs}(\tau) = \varphi_{sg}(\tau) = m_s \cdot m_g = 0$$

[nach (6.86)]

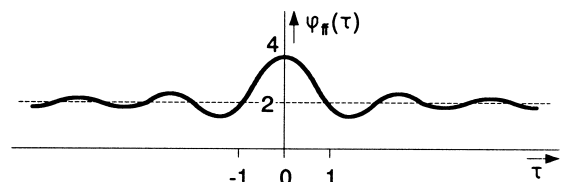
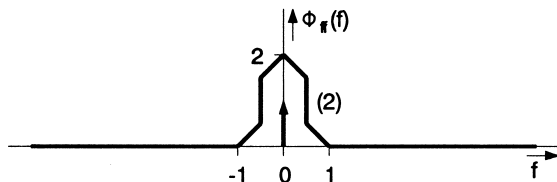
$$\Rightarrow P_f = \varphi_{ss}(0) + \varphi_{gg}(0) = P_s + P_g = 4$$

$$m_f = m_g + m_s = \pm\sqrt{2}$$

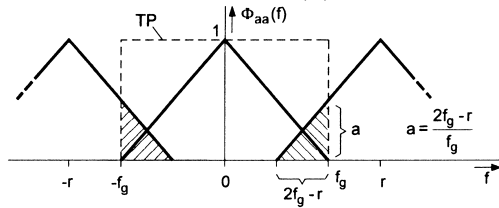
$$\sigma_f^2 = P_f - m_f^2 = 2$$

$$\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{gg}(\tau) = 2 + \text{si}(\pi\tau) + \text{si}^2(\pi\tau)$$

$$\phi_{ff}(f) = \phi_{ss}(f) + \phi_{gg}(f)$$



**6.14** Ohne Berücksichtigung des Abtastamplitudenfaktors gilt für das Leistungsdichtespektrum  $\phi_{aa}(f)$  des abgetasteten Signals (s. Abbildung)



im Durchlaßbereich des TP hat das unverzerrte Nutzsignal die Leistung

$$P_s = \int_{-f_g}^{f_g} \Lambda(f/f_g) df = f_g,$$

die schraffierte Fläche ergibt die Leistung des Abtastfehlersignals

$$P_e = a(2f_g - r) = \frac{1}{f_g}(2f_g - r)^2 \quad \text{für } f_g < r < 2f_g$$

damit ist das Leistungsverhältnis

$$\frac{P_e}{P_s} = \begin{cases} (2 - r/f_g)^2 & \text{für } f_g \leq r \leq 2f_g \\ 0 & \text{für } r \geq 2f_g \end{cases}$$

*Anmerkung* : Die Leistungen  $P_s$  und  $P_e$  dürfen getrennt berechnet werden, da Nutz- und Abtastfehlersignal aus unterschiedlichen Frequenzbereichen des Eingangssignals stammen und daher unkorreliert sind (vgl. Aufgabe 6.7c)

**6.15**  $s(t) = \sum_{i=1}^n s_i(t)$   $n$  statistisch unabhängige Gauß-Prozesse  $s_i(t)$

$$\Rightarrow p_s(x) = p_{s_1}(x) * p_{s_2}(x) * \dots * p_{s_n}(x)$$



$$\text{oder } \mathcal{F}\{p_s(x)\} = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}\{p_{s_i}(x)\}$$

$$p_{s_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp[-(x - m_i)^2 / (2\sigma_i^2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \left[ \left\{ \exp \left\langle -\pi \left( \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right)^2 \right\rangle \right\} * \delta(x - m_i) \right]$$

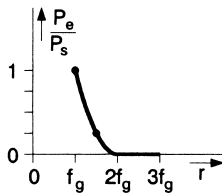
$$\mathcal{F}\{p_{s_i}(x)\} = \exp(-2\pi^2 f^2 \sigma_i^2) \cdot \exp(-j2\pi f m_i)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{p_s(x)\} = \exp \left( -2\pi^2 f^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) \exp \left( -j2\pi f \sum_{i=1}^n m_i \right)$$

$$p_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_i \sigma_i^2}} \exp \left[ -\frac{x - \sum_i m_i}{2 \sum_i \sigma_i^2} \right]$$

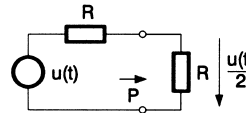
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\left( \frac{x - m}{2\sigma^2} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

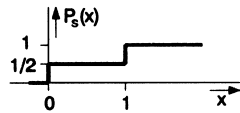


6.16 Maximale Leistung bei Anpassung:

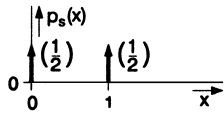
$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}\{u^2(t)\}}{4R} = \frac{4kT_{\text{abs}}Rf_g}{4R} = kT_{\text{abs}}f_g$$



6.17 a)  $P_s(x) = \frac{1}{2}[\varepsilon(x) + \varepsilon(x-1)]$



$$p_s(x) = \frac{d}{dx} P_s(x) = \frac{1}{2}[\delta(x) + \delta(x-1)]$$



b)  $\overline{s(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x[\delta(x) + \delta(x-1)] dx$   
 $= \frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$

$$\overline{s^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x) dx = \frac{1}{2}(0 - 1^2) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_s^2 = \overline{s^2(t)} - [\overline{s(t)}]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

c)  $\varphi_{ss}(\tau) = \overline{s(t) \cdot s(t+\tau)}$

1) für Verschiebungen  $|\tau| > T$  sind  $s(t)$  und  $s(t+\tau)$  unkorreliert

$$\Rightarrow \varphi_{ss}(\tau) = \overline{s(t) \cdot s(t+\tau)} = m_s^2 = 1/4$$

2) für  $\tau = 0 \Rightarrow \varphi_{ss}(0) = \overline{s^2(t)} = 1/2$

3)  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n g(t - nT)$  mit  $g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

diskrete AKF der Koeffizienten:

$$\varphi(n) = \overline{d_m d_{m+n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N d_m d_{m+n}$$

$$= \begin{cases} \overline{d_m^2} = 1/2 & n = 0 \\ (\overline{d_m})^2 = 1/4 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{für}$$

$$\varphi_{gg}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt = T \cdot \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_{ss}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \varphi(n) \varphi_{gg}^E(\tau - nT)$$

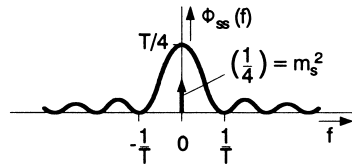
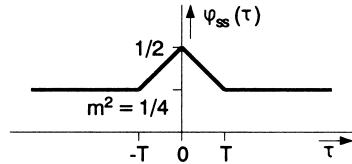


$$= \frac{1}{2} \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) + \frac{1}{4} \sum_{n \neq 0} \Lambda\left(\frac{\tau - nT}{T}\right)$$

$$\varphi_{ss}(\tau) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

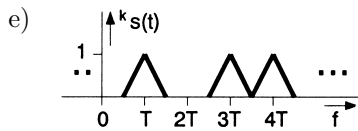


$$\phi_{ss}(f) = \frac{1}{4} [\delta(f) + T \text{sinc}^2(\pi f T)]$$



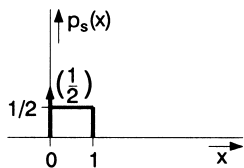
$$d) \quad \overline{s(t)} = \pm \sqrt{\varphi_{ss}(\infty)} = \pm \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \delta(f) df}$$

$$\overline{s^2(t)} = \varphi_{ss}(0) = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ss}(f) df$$



$$P_s(x) = \frac{1}{2} \varepsilon(x) + \left( \left[ \frac{1}{2} x \cdot \varepsilon(x) \right] * [\delta(x) - \delta(x-1)] \right)$$

$$p_s(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



$$\overline{s(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x \delta(x) dx + \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4}$$

$$\overline{s^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = \overline{s^2(t)} - [\overline{s(t)}]^2 = \frac{5}{48}$$

f) nach c) folgt:

$$\varphi_{gg}^E(\tau) = T_0 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \text{ und } \varphi(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ \text{für} & \\ \frac{1}{4} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\varphi_{ss}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \varphi(n) \varphi_{gg}^E(\tau - nT) = \frac{1}{4} \frac{T_0}{T} \Lambda\left(\frac{\tau}{T_0}\right) + \frac{T_0}{4T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{\tau - nT}{T_0}\right)$$

$T_0 \ll T$                        $T_0 = T$

**6.18**  $\mathcal{E}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x - m_s)^2}{2\sigma^2}\right) dx$

mit  $\tau = \frac{x - m_s}{\sqrt{2}\sigma}$ ,  $d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$ ,  $x = \sqrt{2}\sigma\tau + m_s$  folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{s(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma\tau + m_s) e^{-\tau^2} d\tau \cdot \sqrt{2}\sigma \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{-\tau^2} d\tau \right)}_{=0} + \frac{m_s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{m_s}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = m_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{s^2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma\tau + m_s)^2 e^{-\tau^2} d\tau \sqrt{2}\sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2\sigma^2\tau^2 e^{-\tau^2} + \underbrace{2\sqrt{2}m_s\sigma\tau e^{-\tau^2}}_{\text{ungerade}} + m_s^2 e^{-\tau^2}) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 e^{-\tau^2} d\tau + \frac{m_s^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sigma^2 + m_s^2 \end{aligned}$$

**6.19** 
$$p_{sg}(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_g\sqrt{1 - \varrho^2(\tau)}} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_g^2 x^2 + \sigma_s^2 y^2 - 2\sigma_s\sigma_g\varrho(\tau)xy}{2\sigma_s^2\sigma_g^2[1 - \varrho^2(\tau)]}\right) \quad \text{Gl. (6.91)}$$

Hier:  $\sigma_s = \sigma_g = \sigma$

$$\varphi_{sg}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{sg}(x, y, \tau = 0) dy dx \quad \text{Gl. (6.80)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{sg}(0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) dx \right]}_I \cdot y \exp\left(\frac{y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) dy$$

$$1) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(\frac{(x-\rho y)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \exp\left(\frac{\rho^2 y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) dx$$

Substitution:  $t = \frac{x-\rho y}{\sigma\sqrt{2(1-\rho^2)}}$ ,  $dx = \sigma\sqrt{2(1-\rho^2)}dt$

$$I = \left[ \exp\left(\frac{\rho^2 y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} [t \cdot \sigma\sqrt{2(1-\rho^2)} + \rho y] \cdot \exp(-t^2) \sigma\sqrt{2(1-\rho^2)} dt$$

$$I = \rho y \sqrt{\pi} \sigma \sqrt{2(1-\rho^2)} \exp\left(\frac{\rho^2 y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)$$

$$2) \quad \varphi_{sg}(0) = \frac{\rho\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

$$= \frac{\rho}{\sqrt{2}\pi\sigma} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^3}{2} = \rho\sigma^2$$

**6.20** Monotone Transformation einer kontinuierlichen Zufallsvariable

$$s(t_1) = x \rightarrow g(t_1) = y = \text{Tr}\{x\} = \frac{x+a}{b}$$

$$\Rightarrow \text{Umkehrfunktion: } x = \text{Tr}^{-1}\{y\} = b \cdot y - a$$

$$\text{Es gilt: } p_g(y) = p_s(\text{Tr}^{-1}\{y\}) \cdot \left| \frac{d\text{Tr}^{-1}\{y\}}{dy} \right|$$

$$\text{hier: } p_g(y) = |b|p_s(by - a)$$

$$m_g = \mathcal{E}\{g(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_g(y) dy = (m_s + a)/b = [\mathcal{E}\{s(t_1)\} + a]/b$$

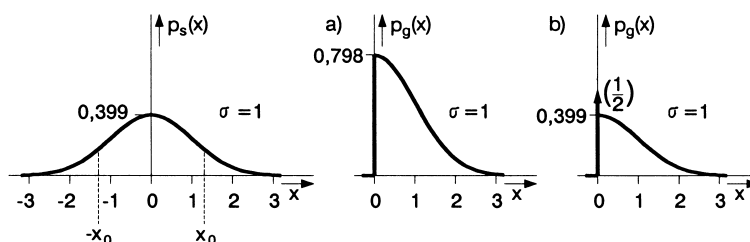
$$P_g = \mathcal{E}\{g^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_g(y) dy = (P_s + 2am_s + a^2)/b^2$$

$$= [\mathcal{E}\{s^2(t_1)\} + 2a \cdot \mathcal{E}\{s(t_1)\} + a^2]/b^2$$

**6.21** Mittelwertfreies Gaußsches Rauschen:

$$p_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

wegen der Symmetrie folgt anschaulich:



allgemeine Lösung auch für nichtsymmetrische Verteilungsdichtefunktionen:

a)  $g(t) = |s(t)|$

$$\text{Prob}\{s(t) \leq -x_0\} + \text{Prob}\{s(t) > x_0\} \stackrel{!}{=} \text{Prob}\{g(t) > x_0\}$$

für  $x_0 \geq 0$

$$P_s(-x_0) + [1 - P_s(x_0)] = 1 - P_g(x_0)$$

$$P_g(x_0) = P_s(x_0) - P_s(-x_0)$$

mit  $x = x_0 \geq 0$  folgt

$$P_g(x) = P_s(x) - P_s(-x), \quad P_g(x) = 0 \quad \text{für } x < 0$$

$$p_g(x) = \frac{d}{dx}P_g(x) = p_s(x) + p_s(-x)$$

$$\Rightarrow p_g(x) = \varepsilon(x) \cdot [p_s(x) + p_s(-x)]$$

b)  $g(t) = \frac{1}{2}[s(t) + |s(t)|]$

$$\Rightarrow P_g(x) = \varepsilon(x) \cdot P_s(x)$$

$$\frac{d}{dx}P_g(x) = p_g(x) = \delta(x) \cdot P_s(x) + \varepsilon(x) \cdot p_s(x)$$

$$= P_s(0)\delta(x) + \varepsilon(x) \cdot p_s(x)$$

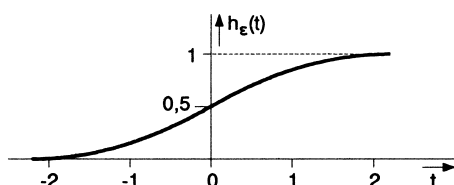
$$p_g(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \varepsilon(x) \cdot p_s(x)$$

**6.22**  $h(t) = \exp(-\pi t^2)$

$$h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \exp(-\pi \tau^2) d\tau$$

Substitution:  $\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x$ ;  $d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}dx$

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp(-x^2) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2}[1 + \text{erf}(t\sqrt{\pi})] = \frac{1}{2}[1 - \text{erf}(-t\sqrt{\pi})] = \frac{1}{2} \text{erfc}(-t\sqrt{\pi}) \end{aligned}$$



**6.23** a) mit (6.63)  $\Rightarrow s_b(t) \geq 0$ , da  $s^2(t) \geq 0$  und  $E > 0$

mit (6.64)  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_b(t) dt = 1$ , da  $E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$

laut Definition von  $E$

b) 
$$\sigma_t = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot s_b(t) dt - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot s_b(t) dt \right]^2 \right\}^{1/2}$$
 analog zu  $\sigma_s = (P_s - m_s^2)^{1/2}$

c)  $s(t) = \text{rect}(t)$  und  $g(t) = -\text{sgn}(t) \cdot \text{rect}(t)$   
 $\Rightarrow s_b = s^2(t) = g^2(t)$   

$$\Rightarrow \sigma_b = \left[ \int_{-1/2}^{1/2} t^2 dt - \left( \int_{-1/2}^{1/2} t dt \right)^2 \right]^{1/2} = 1/\sqrt{12}$$

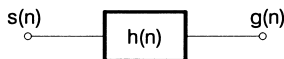
d) Analog:  $S_b(f) = |S(f)|/E$  Beachte:  $S_b(f) \neq \mathcal{F}\{s_b(t)\}$   

$$\sigma_f = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot S_b(f) df - \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot S_b(f) df \right]^2}_{=0, \text{ da } S_b(f) \text{ gerade}} \right\}^{1/2}$$

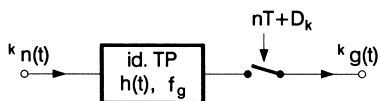
$$= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot S_b(f) df \right]^{1/2}$$

- 6.24** a)  $s(n)$  und  $g(n)$  sind unkorreliert;  $g(n)$  ist mittelwertfrei  
 $\Rightarrow \mu_{sg}(m) = 0$ ; mit  $\mu_{sg}(m) = \varphi_{sg}(m) - m_s \cdot m_g$   
 $\Rightarrow \varphi_{sg}(m) = m_s \cdot m_g$   
 $\mathcal{E}\{p(n)\} = \mathcal{E}\{s(n) \cdot g(n)\} = \varphi_{sg}(0) = 0$  wegen  $m_g = 0$
- b) erneute synchrone Multiplikation mit der gleichen Pseudonoisefolge  $g(n)$   
 $p(n) \cdot g(n) = s(n) \cdot g^2(n) = s(n)$

**6.25** Leistung  $P_g = \varphi_{gg}(0) = [\varphi_{ss}(m) * \varphi_{hh}^E(m)]_{m=0}$   
 mit "Wiener-Lee-Beziehung"  
 $= [\sigma_n^2 \delta(m) * \varphi_{hh}^E(m)]_{m=0} = \sigma_n^2 \varphi_{hh}^E(0)$   
 $= \sigma_n^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) \stackrel{!}{<} \infty$



**6.26** "Abtastmodell" für eine Musterfunktion



wobei  $D_k =$  gleichverteilte Zufallsgröße im Bereich  $[0; T]$  und statistisch unabhängig von  $n(t)$  mit

$${}^k g(t) = [{}^k n(t) * h(t)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT - D_k)$$

$$\Rightarrow \varphi_{gg}(\tau) = [\varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^E(\tau)] \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) \quad \text{bzw.}$$

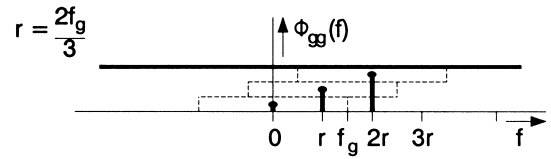
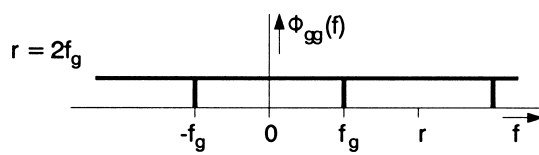


$$\phi_{gg}(f) = N_0 \text{rect} \left( \frac{f}{2f_g} \right) * \left[ \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( f - \frac{n}{T} \right) \right]$$

$$\phi_{gg}(f) \stackrel{!}{=} \text{const. für } r = \frac{1}{T} = \frac{2f_g}{n}, \quad n = \text{ganzzahlig}$$

und damit ist  ${}^k g(t)$  Musterfunktion von zeitdiskrettem, weißen Rauschen.

Beispiel:

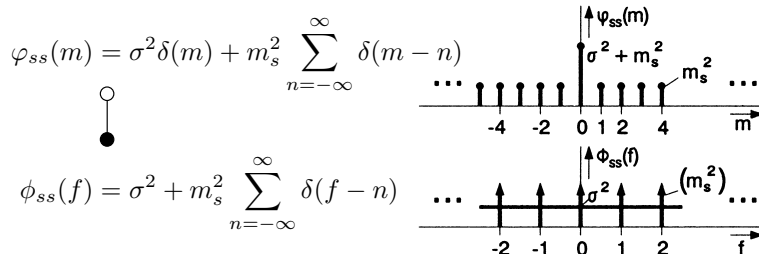


$$\begin{aligned} \mathbf{6.27} \quad \varphi_{gg}(n) &= \mathcal{E} \{ g(n) \cdot g(n+m) \} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{\theta=-\infty}^{\infty} s(n-\theta)h(\theta) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s(n+m-\mu)h(\mu) \right\} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\theta=-\infty}^{\infty} \mathcal{E} \{ s(n-\theta)s(n+m-\mu) \} h(\theta)h(\mu) \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\theta} \varphi_{ss}(m-\mu+\theta)h(\mu)h(\theta) \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} \nu &= \mu - \theta \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\theta} \varphi_{ss}(m-\nu)h(\theta)h(\nu+\theta) = \sum_{\nu} \varphi_{ss}(m-\nu)\varphi_{hh}^E(\nu) \\ &= \varphi_{ss}(m) * \varphi_{hh}^E(m) \end{aligned}$$

**6.28** Zeitdiskretes Rauschen, weiß, aber nicht mittelwertfrei



Gleichverteiltes Rauschen (nach Abb. 6.17)

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad m_s = a/2 = 1/2 \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{a^2}{12} = \frac{1}{12}; \quad m_s^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**6.29**  $h(n) = \varepsilon(n)a^n$  mit  $|a| < 1$

$$\begin{aligned} \varphi_{hh}^E(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)h(n+m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(n)\varepsilon(n+m)a^n a^{n+m} \\ &= a^m \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = a^m/(1-a^2) \quad \text{für } m \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_{hh}^E(m) = a^{|m|}/(1-a^2)$  da  $\varphi_{hh}^E(m)$  gerade

$|H_a(f)|^2 = 1/[1+a^2-2a\cos(2\pi f)]$  nach Abb. 3.17

$\varphi_{gg}(m) = \varphi_{nn}(m) * \varphi_{hh}^E(m)$  Wiener-Lee-Beziehung

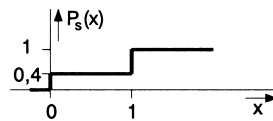
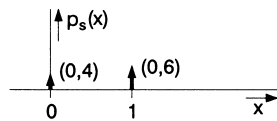
mit  $\varphi_{nn}(m) = \sigma_n^2 \delta(m)$

$\Rightarrow \varphi_{gg}(m) = \sigma_n^2 \cdot a^{|m|}/(1-a^2)$

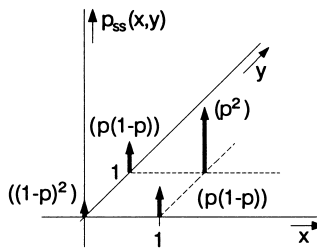
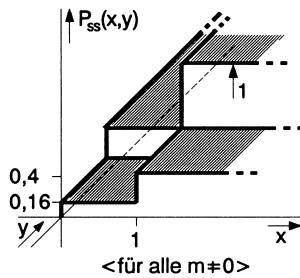
$\varphi_{gg}(f) = \sigma_n^2 \cdot a^{|m|}/(1-a^2)$

$P = \varphi_{gg}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_{gg}(f)df = \sigma_n^2/(1-a^2)$

**6.30** a)

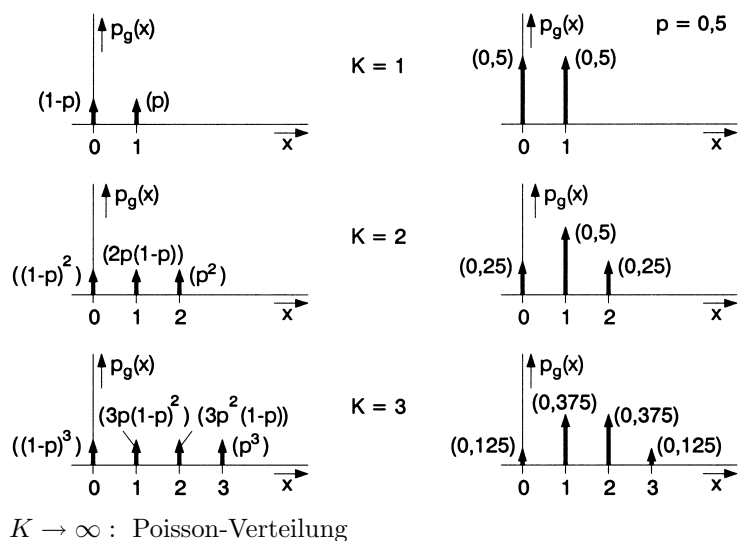


b)  $P_{ss}(x, y, m \neq 0) = P_s(x) \cdot P_s(y)$ , da statistisch unabhängig  
bzw.  $p_{ss}(x, y, m \neq 0) = p_s(x) \cdot p_s(y)$

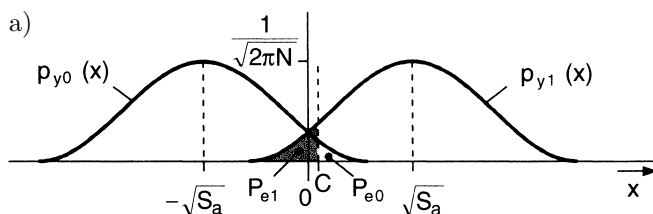


c)  $\varphi_{ss}(m) = \mathcal{E}\{s(n) \cdot s(n+m)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_{ss}(x, y, m \neq 0)dydx$   
 $= p^2 = 0,36$

d)  $p_g(x) = \underbrace{p_s(x) * p_s(x) \dots * p_s(x)}_K$   
 $= \sum_{i=0}^K \binom{K}{i} p^i (1-p)^{K-i} \delta(x-i)$  (Binomialverteilung)



6.31 a)



b)  $P_e = P_1 \cdot P_{e1} + (1 - P_1) \cdot P_{e0}$

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^C p_{y1}(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{S_a} - C}{\sqrt{2N}} \right) \quad (\text{wie bei unipolarer Übertragung (6.98)})$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P_{e0} &= \int_C^{\infty} p_{y0}(x) dx = \int_C^{\infty} p_{y1}(-x) dx = \int_{-\infty}^{-C} p_{y1}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{S_a} + C}{\sqrt{2N}} \right) \end{aligned}$$

d) mit  $a = \sqrt{\frac{S_a}{2N}}$  und  $x = \frac{C}{\sqrt{2N}}$  folgt:

$$P_e = \frac{P_1}{2} \operatorname{erfc}(a - x) + \frac{1 - P_1}{2} \operatorname{erfc}(a + x)$$

mit (6.141) ergibt sich

$$\frac{dP_e}{dx} = \frac{P_1}{2} \cdot \frac{+2}{\sqrt{\pi}} e^{-(a-x)^2} + \frac{1 - P_1}{2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-(a+x)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - P_1}{P_1} = e^{-(a-x)^2 + (a+x)^2} = e^{4ax} \Rightarrow x = \frac{1}{4a} \ln \left( \frac{1 - P_1}{P_1} \right) \quad \text{und}$$

$$C = \frac{N}{2\sqrt{S_a}} \ln \left( \frac{1 - P_1}{P_1} \right)$$

e) mit  $\frac{S_a}{N} = \frac{E}{N_0}$  und  $N = E \cdot N_0$  folgt

$$C = \frac{N_0}{2} \ln \left( \frac{1 - P_1}{P_1} \right)$$

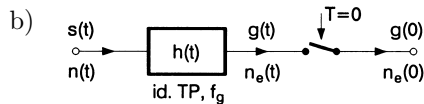


**Kapitel 7**

7.1 a)  $E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$  "Parsevalsches Theorem"

$s(t) \circ \bullet S(f) = \text{rect}[f/(2f_{g_0})]$

$\Rightarrow E = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}[f/(2f_{g_0})] df = 2f_{g_0}$



Korrelationsfilter:  $h(t) = s(-t)$  idealer Tiefpass,  $f_g = f_{g_0}$

$S_a = g^2(0)$

mit  $g(t) = s(t) * s(-t) = \varphi_{ss}^E(t)$

$\Rightarrow S_a = [\varphi_{ss}^E(0)]^2 = E^2 = (2f_{g_0})^2$

$\Rightarrow N = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \cdot 2f_{g_0}$

$\frac{S_a}{N} = \frac{E}{N_0} = \frac{2f_{g_0}}{N_0}$

c) 1)  $f_g < f_{g_0}$

$G(f) = S(f) \cdot H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) \bullet \circ g(t) = 2f_g \text{si}(2\pi f_g t)$

$\Rightarrow g(0) = 2f_g$  und  $S_a = g^2(0) = (2f_g)^2$

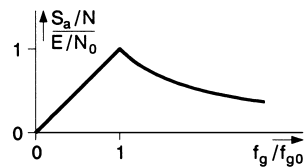
$N = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \cdot 2f_{g_0}$

$\Rightarrow \frac{S_a/N}{E/N_0} = \frac{2f_g \cdot N_0}{N_0 \cdot 2f_{g_0}} = \frac{f_g}{f_{g_0}}$

2)  $f_g > f_{g_0}$

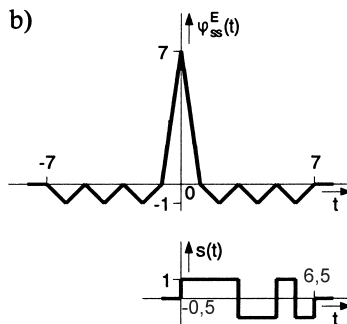
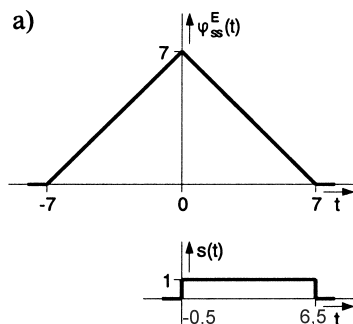
$S_a = (2f_{g_0})^2$  und  $N = N_0 \cdot 2f_g$

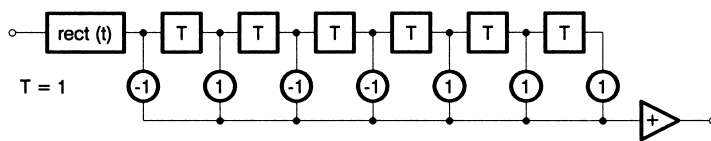
$\Rightarrow \frac{S_a/N}{E/N_0} = \frac{(2f_{g_0})^2 \cdot N_0}{N_0 \cdot 2f_g \cdot 2f_{g_0}} = \frac{f_{g_0}}{f_g}$



7.2  $s(t) = \sum_{n=0}^6 s(n) \text{rect}(t - n)$

$\varphi_{ss}^E(t) = s(t) * s(-t)$  mit Papierstreifenmethode folgt:





**7.3** Fehlerwahrscheinlichkeit bei bipolarer Übertragung:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) \stackrel{!}{<} 10^{-4};$$

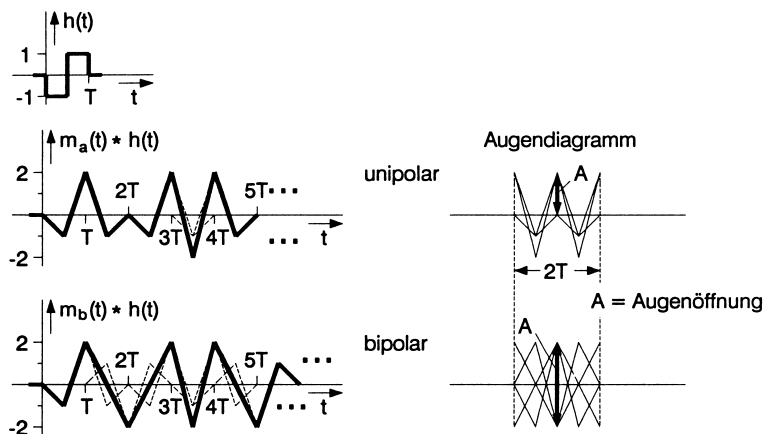
mit Tabelle 6.1 folgt:

$$\sqrt{\frac{E}{2N_0}} > 2,6 \Rightarrow E > 13,5N_0 = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2 \text{ s}$$

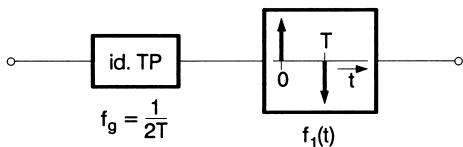
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T t^2 dt V^2 = \frac{T}{3} \text{ V}^2$$

$$\Rightarrow T = 3E \approx 40,5 \mu\text{s}$$

**7.4** Korrelationsfilter:



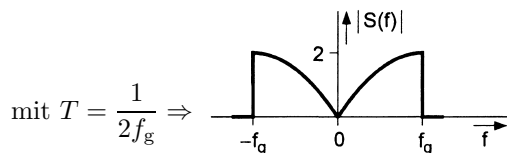
**7.5** Sender:



a)  $s(t) = [2f_g \operatorname{si}(2\pi f_g t)] * [\delta(t) - \delta(t - T)]$

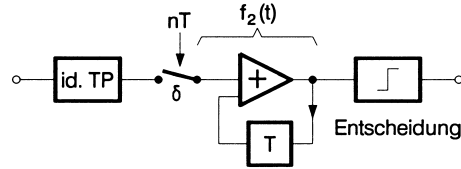
$$S(f) = \operatorname{rect} \left( \frac{f}{2f_g} \right) \cdot [1 - e^{-j2\pi f T}]$$

$$= 2j \operatorname{rect} \left( \frac{f}{2f_g} \right) \sin(\pi f T) e^{-j\pi f T}$$



b)  $f_1(t) * f_2(t) \stackrel{!}{=} \delta(t) \Rightarrow f_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

Empfänger:



- 7.6** a) für alle Walsh-Funktionen gilt:  $E = a^2 \cdot T$   
 b) sin-cos-Impulsfunktionen:

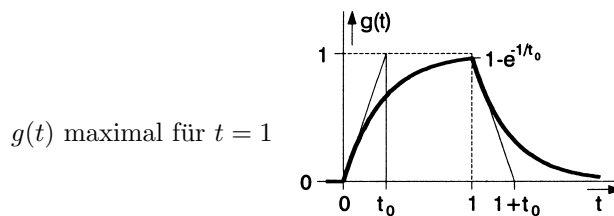
$$E_1 = 2a^2 \int_0^T \cos^2(2\pi f_1 t) dt = 2a^2 \left[ \frac{T}{2} + \frac{1}{8\pi f_1} \sin(4\pi f_1 T) \right]$$

bzw.

$$E_2 = 2a^2 \int_0^T \sin^2(2\pi f_1 t) dt = 2a^2 \left[ \frac{T}{2} - \frac{1}{8\pi f_1} \sin(4\pi f_1 T) \right]$$

mit  $f_1 = \frac{n}{T} \Rightarrow E_1 = E_2 = a^2 \cdot T$

- 7.7** a) nach Kapitel 1.5 folgt mit  $g_1(t) = \varepsilon(t)(1 - e^{-t/t_0})$   
 $g(t) = g_1(t) - g_1(t - 1)$



$g(t)$  maximal für  $t = 1$

b)  $S_a = g^2(1) = (1 - e^{-1/t_0})^2$   

$$N = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} [1 + (2\pi f t_0)^2]^{-1} df = \frac{N_0}{2t_0}$$

$$\frac{S_a}{N} = \frac{2t_0}{N_0} (1 - e^{-1/t_0})^2,$$

- c) mit der Produktregel folgt:

$$\frac{d}{dt_0} \left( \frac{S_a}{N} \right) = \frac{2}{N_0} (1 - e^{-1/t_0}) \cdot \left[ (1 - e^{-1/t_0}) - \frac{2}{t_0} e^{-1/t_0} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t_0 \approx 0,8, \quad \text{und mit } E = 1$$

$$\Rightarrow \frac{S_a/N}{E/N_0} = 2t_0(1 - e^{-1/t_0})^2 \approx 0,814 \hat{=} -0,89 \text{ dB}$$

**7.8**  $E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \varphi_{ss}^E(0)$

mit

$$\varphi_{ss}^E(\tau) = \text{Re}\{\varphi_{ssT}^E(\tau) e^{j2\pi f_0 \tau}\} \Rightarrow \varphi_{ss}^E(0) = \varphi_{ssT}^E(0)$$

wegen

$$\varphi_{ss_T}^E(\tau) \frac{1}{2} [s_T^*(-\tau) * s_T(\tau)] \Rightarrow \varphi_{ss_T}^E(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(t)|^2 dt$$

somit gilt:

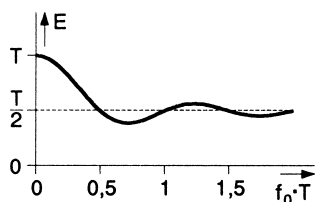
$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df \quad (\text{mit Parsevalschem Theorem})$$

für

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t) \quad (\text{Beachte: nicht bandbegrenzt!})$$

$$\text{a) } E = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{T}{2} [1 + \text{si}(2\pi f_0 T)] \quad (\text{s. Abbildung})$$

$$\text{b) } E \approx \frac{T}{2} \quad \text{für } f_0 \gg \frac{1}{T}$$



$$\mathbf{7.9} \quad h(t) = \text{Re}\{h_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = ks(T-t) = \text{Re}\{ks_T(T-t)e^{j2\pi f_0(T-t)}\}$$

mit  $\text{Re}\{z\} = \text{Re}\{z^*\}$  folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{Re}\{ks_T^*(T-t) \cdot e^{j2\pi f_0(t-T)}\} = \text{Re}\{ks_T^*(T-t)e^{-j2\pi f_0 T} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\ &\Rightarrow h_T(t) = ks_T^*(T-t)e^{-j2\pi f_0 T} \end{aligned}$$

$$\mathbf{7.10} \quad s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{für } f_0 \gg \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow s_T(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \text{reell}$$

$$s(t-t_0) = \text{Re}\{s_T(t-t_0)e^{j2\pi f_0(t-t_0)}\} = \text{Re}\{\underbrace{s_T(t-t_0)}_{s_{Tv}(t)} \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$s_{Tv}(t) = \underbrace{s_T(t-t_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t_0)}_{s_{Tr}(t)} - \underbrace{j s_T(t-t_0) \cdot \sin(2\pi f_0 t_0)}_{-s_{Ti}(t)}$$

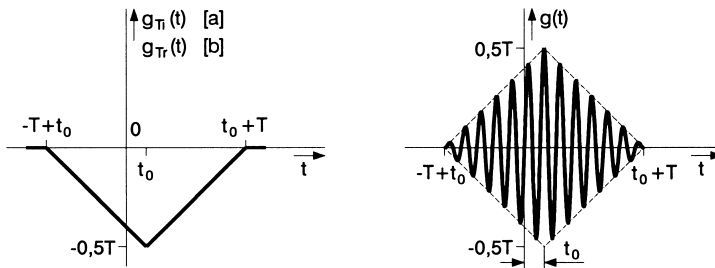
$$\begin{aligned} g_{Tr}(t) &= \frac{1}{2} [s_{Tr}(t) * s_T(-t)] = \frac{1}{2} [s_T(t-t_0) * s_T(-t)] \cdot \cos(2\pi f_0 t_0) \\ &= \varphi_{ss_T}^E(t-t_0) \cos(2\pi f_0 t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{Ti}(t) &= \frac{1}{2} [s_{Ti}(t) * s_T(-t)] = -\frac{1}{2} [s_T(t-t_0) * s_T(-t)] \cdot \sin(2\pi f_0 t_0) \\ &= -\varphi_{ss_T}^E(t-t_0) \sin(2\pi f_0 t_0) \end{aligned}$$

Addierschaltung:

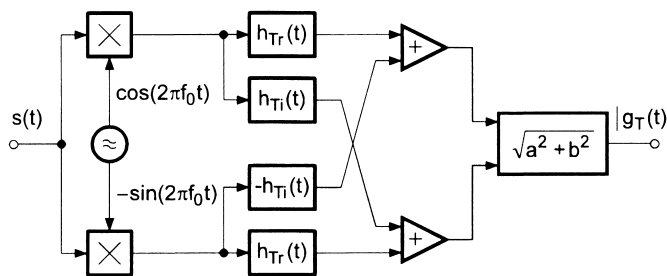
$$\begin{aligned}
 g(t) &= g_{Tr}(t) \cos(2\pi f_0 t) - g_{Ti}(t) \sin(2\pi f_0 t) \\
 &= \varphi_{ss_T}^E(t - t_0) [\cos(2\pi f_0 t_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\
 &\quad + \sin(2\pi f_0 t_0) \cdot \sin(2\pi f_0 t)] \\
 &= \varphi_{ss_T}^E(t - t_0) \cos[2\pi f_0(t - t_0)]
 \end{aligned}$$

- a)  $2\pi f_0 t_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow g_{Tr}(t) = 0, \quad g_{Ti}(t) = -\varphi_{ss_T}^E(t - t_0)$   
 $\Rightarrow g(t) = \varphi_{ss_T}^E(t - t_0) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$
- b)  $2\pi f_0 t_0 = \pi \Rightarrow g_{Ti}(t) = 0, \quad g_{Tr}(t) = -\varphi_{ss_T}^E(t - t_0)$   
 $\Rightarrow g(t) = -\varphi_{ss_T}^E(t - t_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

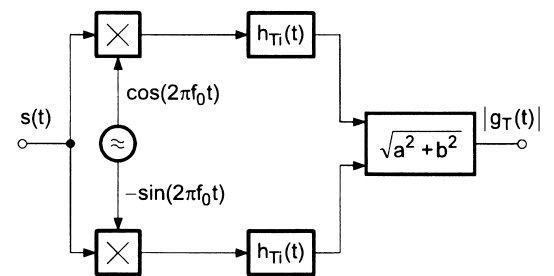


7.11

Hüllkurvenempfänger für nichtsymmetrisches BP-Trägersignal



Hüllkurvenempfänger für Trägersignal mit rein imaginärer Hüllkurve



7.12 Signal:  $s(t) = \text{Re} \left\{ \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$

Filter:  $h(t) = \text{Re} \left\{ \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) e^{j2\pi \Delta f t} e^{j2\pi f_0 t} \right\}$

Ausgangssignal:  $g(t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} [s_T(t) * h_T(t)] e^{j2\pi f_0 t} \right\}$

$$\Rightarrow g_T(t) = \left[ \frac{1}{2} \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \right] * \left[ \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) e^{j2\pi \Delta f t} \right]$$

für  $|t| > T \Rightarrow g_T(t) = 0$

$$-T < t \leq 0 \Rightarrow g_T(t) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{t+T/2} e^{j2\pi \Delta f \tau} d\tau = \frac{\sin[\pi \Delta f (t+T)]}{2\pi \Delta f} e^{j\pi \Delta f t}$$

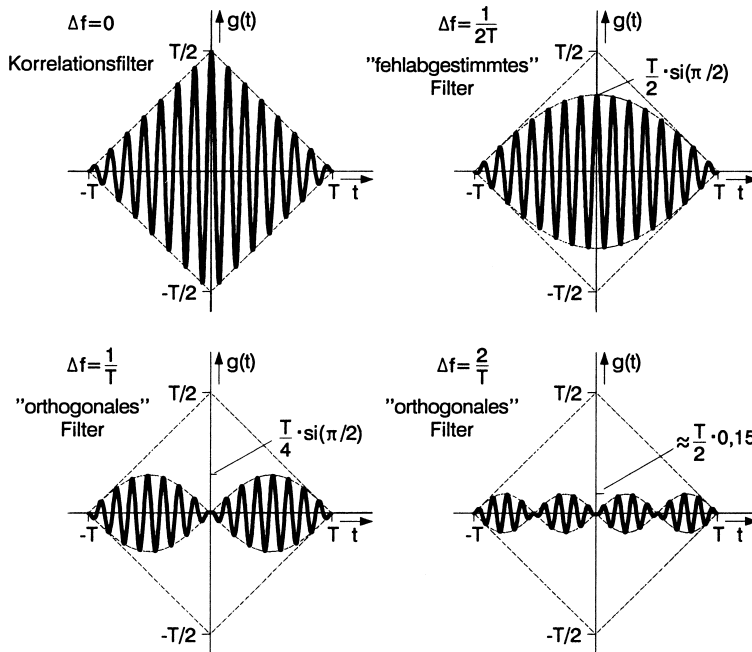
$$0 < t \leq T \Rightarrow g_T(t) = \frac{1}{2} \int_{t-T/2}^{T/2} e^{j2\pi\Delta f\tau} d\tau = \frac{\sin[\pi\Delta f(T-t)]}{2\pi\Delta f} e^{j\pi\Delta ft}$$

$$\Rightarrow g(t)$$

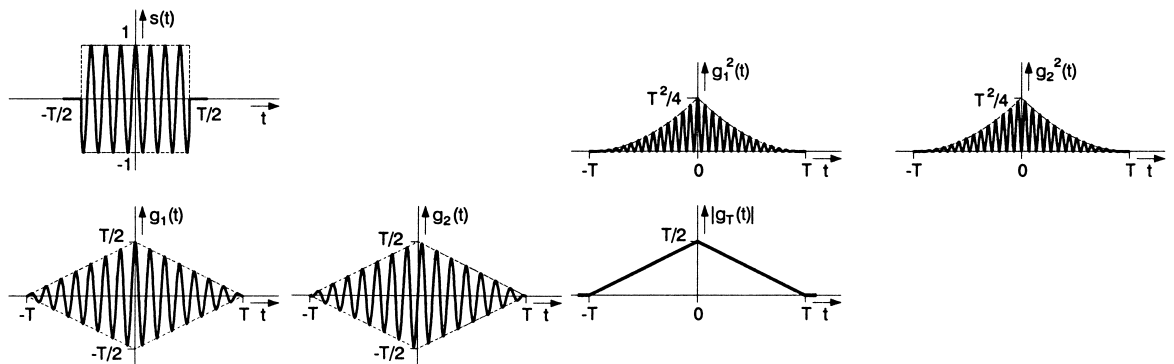
$$= \text{Re} \left\{ \text{rect} \left( \frac{t}{2T} \right) \frac{T}{2} \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) \cdot \text{si}[\pi\Delta f(T-|t|)] e^{j\pi\Delta ft} e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$g(t)$$

$$= \frac{T}{2} \Lambda \left( \frac{t}{T} \right) \text{si}[\pi\Delta f(T-|t|)] \cos \left[ 2\pi t \left( f_0 + \frac{\Delta f}{2} \right) \right]$$



7.13



7.14  $h_{1T}(t) = s_T(-t)$  und  $h_{2T}(t) = -js_T(-t)$  mit  $s_T(t) = \text{reell}$  mit

$$\varphi_{hh_T}^E(\tau) = \frac{1}{2} h_T^*(-\tau) * h_T(\tau) \text{ folgt:}$$

$$\varphi_{h_1h_{1T}}^E(\tau) = \frac{1}{2} s_T(\tau) * s_T(-\tau) = \varphi_{ss_T}^E(\tau) = \text{reell}$$

$$\varphi_{h_2h_{2T}}^E(\tau) = \frac{1}{2} [js_T(\tau)] * [-js_T(-\tau)] = \varphi_{ss_T}^E(\tau) = \text{reell}$$

$$\varphi_{hh}^E(\tau) = \text{Re}\{\varphi_{hh_T}^E(\tau) e^{j2\pi f_0\tau}\} = \varphi_{h_1h_2}^E(\tau) = \varphi_{h_2h_2}^E(\tau)$$

$$= \varphi_{ss_T}^E(\tau) \cos(2\pi f_0\tau)$$

**7.15** Rayleigh-Verteilungsdichtefunktion:

$$p_s(x) = \varepsilon(x) \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{Gl. (7.53)}$$

$$P_s(x) = \int_{-\infty}^x p_s(y) dy = \varepsilon(x) (1 - e^{-x^2/2\sigma^2})$$

$$m_R = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x) dx = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$$

$$\mathcal{E}\{s^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x) dx = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 2\sigma^2$$

$$\sigma_R^2 = \mathcal{E}\{s^2(t)\} - m_R^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

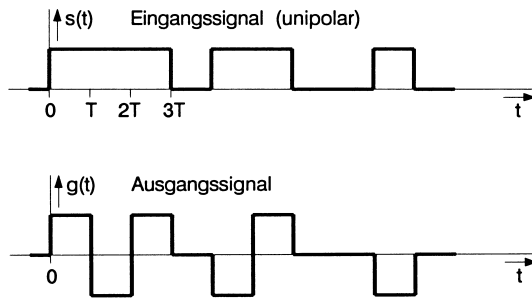
$$\frac{d}{dx} p_s(x) = \frac{1}{\sigma^2} \left[ e^{-x^2/2\sigma^2} + x e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sigma^2}\right) \right] \stackrel{!}{=} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$\Rightarrow x = \sigma \Rightarrow p_s(\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-0,5} \approx \frac{0,607}{\sigma} \quad \text{Maximalwert}$$

**7.16** Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 7.8 gilt:

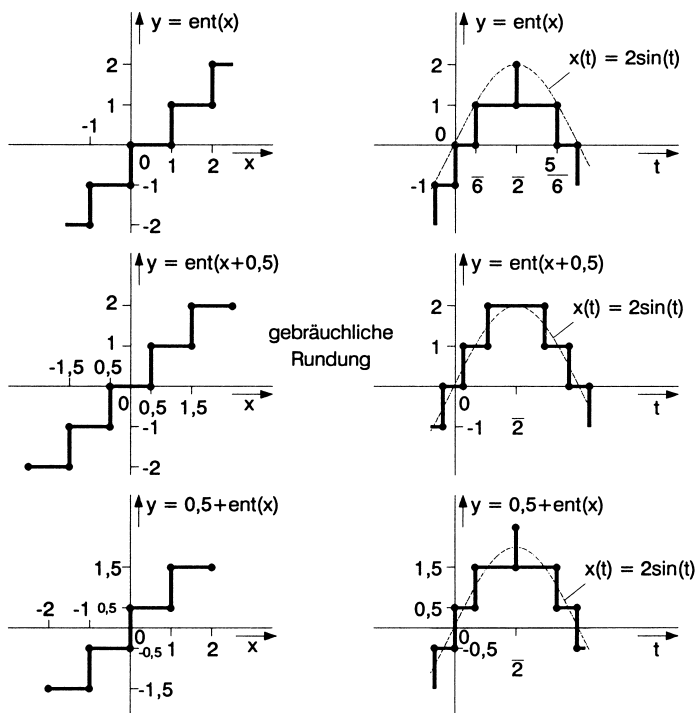
$$\varphi_{h_1 h_1}^E(0) = \varphi_{h_1 h_{1T}}^E(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df = 2f_{\Delta}$$

**7.17**



- Eigenschaften:
- 0 bleibt erhalten
  - 1 wechselt alternierend das Vorzeichen (Alternate Mark Inversion)
- ⇒ Ausgangsfolge mittelwertfrei!  
Rückgewinnung durch Betragsbildung

7.18



7.19  $\pi = 3,141592654 \dots$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 2^0 + 2^1 \Rightarrow 11 \\ 0,5 = 2^{-1} \Rightarrow 0 \\ 0,25 = 2^{-2} \Rightarrow 0 \\ 0,125 = 2^{-3} \Rightarrow 1 \\ 0,0625 = 2^{-4} \Rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \approx 11,0010_2$$

$$\text{relativer Fehler: } \varepsilon = \left| \frac{\pi - 3,125}{\pi} \right| = 0,53\%$$

7.20 a) Quantisierungsrauschen: (Nutzsignal gleichverteilt)

$$\frac{S_a}{N_q} = 2^{2k} \Rightarrow 10 \lg \left( \frac{S_a}{N_q} \right) \approx k \cdot 6 \text{ dB} \quad (7.75)$$

$$\Rightarrow k \approx 6,7 \rightarrow k = 7 \text{ bit/Abtastwert}$$

b) Kanalstörungen:

$$\frac{S_a}{N_{Pe}} = \frac{1}{4P_e} \stackrel{!}{\geq} 10^4 \cong 40 \text{ dB} \quad (7.77)$$

$$\Rightarrow P_e \leq 2,5 \cdot 10^{-5}$$

c) kohärente unipolare Übertragung:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{\frac{E}{8N_0}} \leq 2,5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \frac{E}{8N_0} \approx (2,87)^2$$

$$\Rightarrow \frac{E}{N_0} = 65,9 \cong 18,2 \text{ dB}$$

d) Übertragungsrate und -bandbreite:

$$\beta = f_{\Delta}/f_g \quad (7.80) \Rightarrow f_{\Delta} = k \cdot f_g = 28 \text{ kHz}$$

$$r = 2k f_g = 56 \text{ kbit/s}$$

$$\text{Fernsehsignal mit } f_g = 5 \text{ MHz} \Rightarrow f_{\Delta \text{TV}} = 35 \text{ MHz}$$

$$(\text{bei } 7 \text{ bit-Quantisierung}) \quad r_{\text{TV}} = 70 \text{ Mbit/s}$$



**7.21 exakt:**

a)  $P_w = 1 - (1 - P_e)^k$   
 $= 1 - (1 - 10^{-2})^8$   
 $= 0,0773$

b)  $P_w = 1 - (1 - 0,5)^8$   
 $= 0,996$

**Näherung:**

$P_w = kP_e$   
 $= 8 \cdot 10^{-2}$   
 $= 0,08$

$P_w = 8 \cdot 0,5$   
 $= 4$

**7.22** mit  $(1 - x)^n \approx 1 - nx$  für  $x \ll 1$  folgt:

$(1 - 2P_e)^M \approx 1 - M \cdot 2P_e$  für sehr kleine  $P_e$  und nicht zu große  $M$ .  
 $\Rightarrow P_{e_{ges}} \approx \frac{1 - (1 - M \cdot 2P_e)}{2} = MP_e$

**7.23** mit (7.75) folgt:  $k \geq 80/6 \text{ bit} \Rightarrow k = 14 \text{ bit/Abtastwert}$

**7.24**  $P_{e0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{C}{\sqrt{2N}} \right)$  (6.101), mit  $C = \sqrt{S_a}$  folgt:

$P_{e0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{S_a}{2N}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{28,84}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(3,8) \approx 3,85 \cdot 10^{-8}$

$P_{e1} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{S_a} - C}{\sqrt{2N}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(0) = 0,5$

Zu unsymmetrischen Entscheidungen s. Aufgabe 6.31.

Unsymmetrische Entscheidungen finden weiter dort Anwendungen, wo Fehlentscheidungen sehr teuer werden können (z. B. Feuermelder)

Normalfall:  $C = \sqrt{S_a}/2 \Rightarrow P_{e_{min}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{8N_0}} \approx 3,6 \cdot 10^{-3}$  (6.103)

**7.25** Bei Berechnung der Quantisierungsleistung  $N_q$  wird angenommen, daß innerhalb einer Quantisierungsstufenbreite das Quantisierungssrauschen  $f_D(nT)$  gleichverteilt ist und die Verteilungsdichtefunktion

$p_{f_D}(x) = \frac{1}{\Delta} \operatorname{rect} \left( \frac{x}{\Delta} \right)$  hat. Der Quantisierungsfehler hat dann die Augenblicksleistung  $N_q$ :

$N_q = \mathcal{E} \{ f_D^2(nT) \} = \frac{\Delta^2}{12}$  mit  $\Delta = \frac{A_{max}}{2^k} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sigma_f}{2^k}$

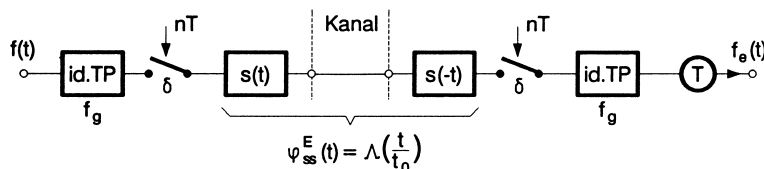
$\Rightarrow N_q = \frac{3\sigma_f^2}{2^{2k}}$ ; mit  $S_a = \sigma_f^2 \Rightarrow \frac{S_a}{N_q} = \frac{2^{2k}}{3}$

$P = \operatorname{Prob}[|s(t)| > 3\sigma_f] = 2 \cdot \operatorname{Prob}[s(t) > 3\sigma_f]$

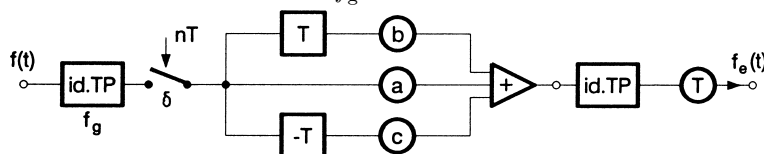
$= 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{C}{\sqrt{2N}} \right) = \operatorname{erfc} \left( \frac{3\sigma_f}{\sqrt{2\sigma_f^2}} \right) = \operatorname{erfc} \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \approx 3 \cdot 10^{-3}$

**Kapitel 8**

**8.1** PAM-Übertragungssystem mit  $s(t) = \text{rect}(t/t_0)/\sqrt{t_0}$



mit  $T < t_0 < 2T$  und  $T = \frac{1}{2f_g}$  folgt ein Ersatzmodell:

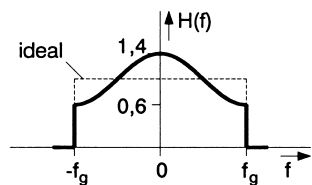


mit  $a = \varphi_{ss}^E(0) = 1$ ,  $b = \varphi_{ss}^E(T) = \frac{t_0 - T}{t_0}$ ,  $c = \varphi_{ss}^E(-T) = b$   
 Nach Vertauschung der Reihenfolge der LTI-Systeme und Zusammenfassung von Tiefpass, Abtaster und Tiefpass zu einem idealen Tiefpass (s. Abb. 3.7) folgt:

$$h(t) = [a\delta(t) + b\delta(t - T) + b\delta(t + T)] * [2f_g \text{si}(2\pi f_g t)]$$



$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) \cdot [1 + 2b \cos(2\pi fT)] \quad \text{mit} \quad b = \frac{t_0 - T}{t_0}$$



mit  $T = 125 \mu\text{s} \Rightarrow f_g = 4 \text{ kHz}$   
 $b = 0,2$   
 $\Rightarrow$  Höhenabfall bei Eigeninterferenzen

**8.2**  $f_e(t) = \{f(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos[2\pi f_0 t - \varphi(t)]\} * [2f_g \text{si}(2\pi f_g t)]$   
 $= \left( f(t) \cdot \frac{1}{2} \{ \cos[\varphi(t)] + \cos[4\pi f_0 t - \varphi(t)] \} \right) * [2f_g \text{si}(2\pi f_g t)]$

wegen  $f_g \ll f_0 \Rightarrow f_e(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos[\varphi(t)]$

a)  $f_e(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\varphi_0)$

b)  $f_e(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos(2\pi \Delta f t)$

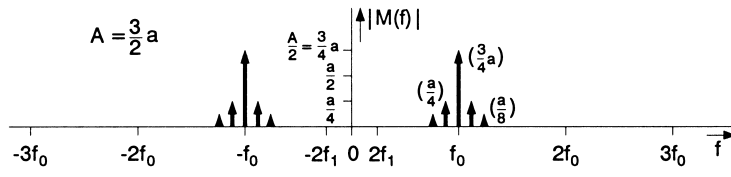
**8.3**  $f(t) = a \cos(2\pi f_1 t) + \frac{a}{2} \cos(4\pi f_1 t + \varphi)$  ( $\varphi$  beliebig)

a)  $f(t) + A \geq 0 \Rightarrow A \geq 1,5a \Rightarrow a/A \leq 2/3$

$m(t) = [f(t) + A] \cdot \cos(2\pi f_0 t)$



$$M(f) = [F(f) + A\delta(f)] * \left[ \frac{1}{2} \delta(f + f_0) + \frac{1}{2} \delta(f - f_0) \right]$$

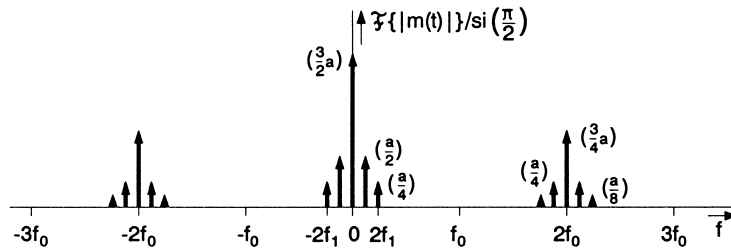


b)  $|m(t)| = [f(t) + A] \cdot |\cos(2\pi f_0 t)|$   
 $= m(t) \cdot \left\{ \left[ (2 \text{rect}(2f_0 t)) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_0}\right) \right] - 1 \right\}$



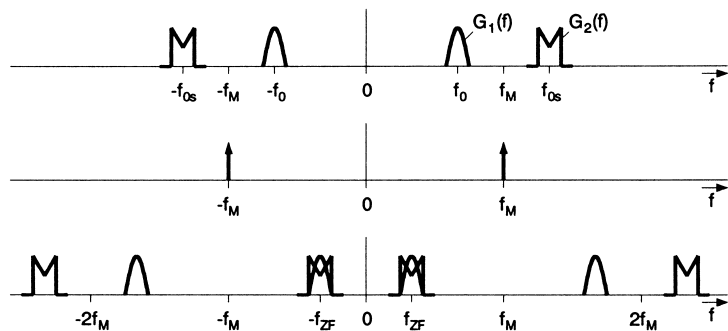
$$\mathcal{F}\{|m(t)|\} = M(f) * \left[ \text{si}\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) - \delta(f) \right]$$

$$= M(f) * \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \text{si}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \delta(f - nf_0)$$



8.4 a)  $g(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_M t)$   
 $= f(t) \cdot \frac{1}{2} \{ \cos[2\pi(f_0 - f_M)t] + \cos[2\pi(f_0 + f_M)t] \}$   
 $\Rightarrow f_{ZF} = |f_0 \pm f_M|$  ZF-Bereich zunächst tiefer als Nutzsignalbereich

b)  $g_1(t) = f_1(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \circ \bullet G_1(f)$ ,  
 $g_2(t) = f_2(t) \cdot \cos(2\pi f_{0s} t) \quad \circ \bullet G_2(f)$



Spiegelfrequenz  $f_{0s} = |f_{ZF} \pm f_M|$   
 Unterdrückung des Spiegelfrequenzsignals durch Bandpaß am Empfängereingang.

c) Mittelwellenbereich :  $0,5 \text{ MHz} < f_0 < 1,5 \text{ MHz}$   
 Annahme:  $f_M > f_0$   
 $\Rightarrow f_{0\min} + 2f_{ZF} \geq f_{0\max} \Rightarrow f_{ZF\min} \geq \frac{f_{0\max} - f_{0\min}}{2} = 0,5 \text{ MHz}$

UKW-Bereich:  $88 \text{ MHz} < f_0 < 108 \text{ MHz}$  (US-Norm)

$$\Rightarrow f_{ZF \min} \geq \frac{f_{0 \max} - f_{0 \min}}{2} = 10 \text{ MHz}$$

d) Mittelwellenbereich:

$$f_M > f_0 : 1 \text{ MHz} < f_M < 2 \text{ MHz} \hat{=} (f_{0 \min} + f_{ZF}) < f_M < (f_{0 \max} + f_{ZF})$$

$$f_M < f_0 : 0 \text{ MHz} < f_M < 1 \text{ MHz} \hat{=} (f_{0 \min} - f_{ZF}) < f_M < (f_{0 \max} - f_{ZF})$$

UKW-Bereich:

$$f_M > f_0 : 98 \text{ MHz} < f_M < 118 \text{ MHz}$$

$$f_M < f_0 : 78 \text{ MHz} < f_M < 98 \text{ MHz}$$

e) ZF-Filter:  $f_{\Delta} = 10 \text{ kHz}$  Tiefpass:  $f_g = 5 \text{ kHz}$

Eingangsbandpaß:  $f_{\Delta} = 10 \text{ kHz}$  (MW) bei variabler Mittenfrequenz

f)  $f_1 = 1,5 \text{ MHz}$  ,  $f_2 = 0,5 \text{ MHz} + f_{ZF} = 3,7 \text{ MHz}$  .

**8.5** a)  $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} \exp(-j\pi/2) & \text{für } f > 0 \\ \exp(j\pi/2) & \text{für } f < 0 \end{cases} = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$

wobei

$$|H(f)| = 1 \text{ für } f \neq 0 \text{ und } \varphi(f) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{für } f > 0 \\ \pi/2 & \text{für } f < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(f) = -\pi \left[ \varepsilon(f) - \frac{1}{2} \right]$$

$$H(f) = -j[2\varepsilon(f) - 1] \bullet \circ h(t) = -j \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} - \delta(t) \right)$$

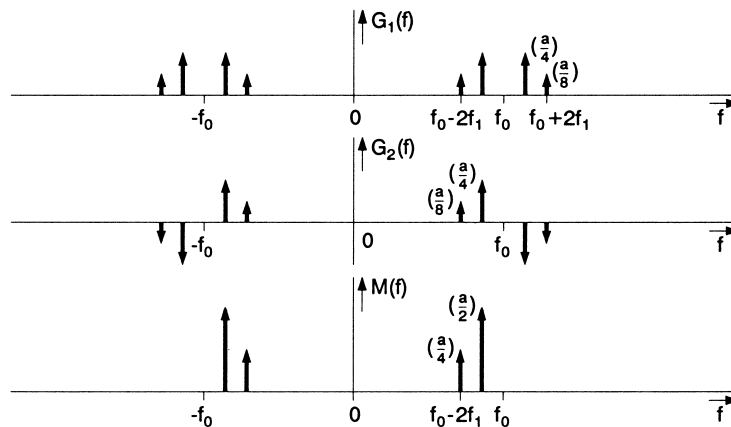
$$= \frac{1}{\pi t}$$

$$s(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{s}(t) \quad \text{“Hilbert-Transformation”}$$

b)  $g_1(t) = f(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \circ \bullet G_1(f)$  ,

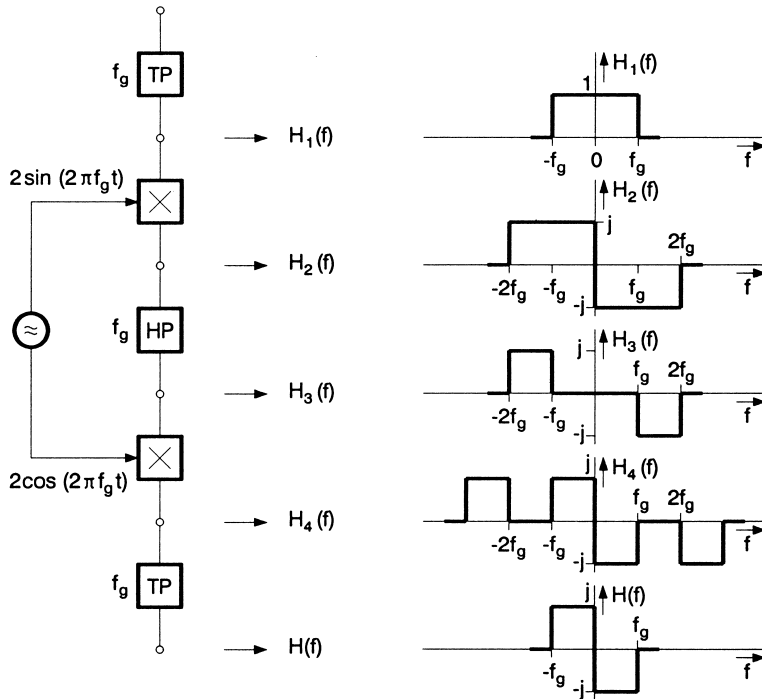
$$g_2(t) = \left( f(t) * \frac{1}{\pi t} \right) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \circ \bullet G_2(f)$$

$$M(f) = G_1(f) + G_2(f)$$



c)  $M(f)$  aus b)  $\rightarrow$  unteres Seitenband; bei Ansteuerung des unteren Multiplikators mit  $-\sin(\cdot)$   $\rightarrow$  Erzeugung des oberen Seitenbandes.

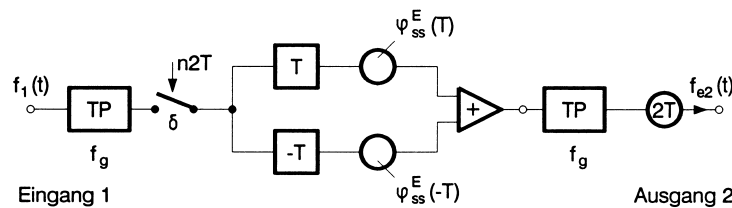
8.6 a)



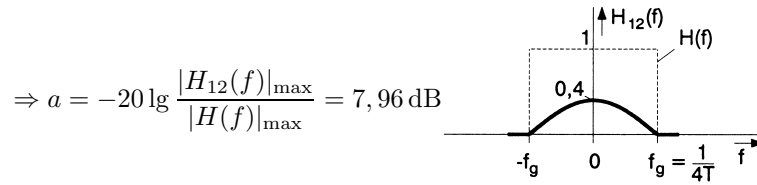
b)  $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) \bullet \circ h(t) = \frac{1}{\pi t} * [2f_g \operatorname{si}(\pi 2f_g t)]$   
 "Hilbert-Transformation" für  $0 < |f| < f_g$

8.7 Zeitmultiplexsystem nach Abb. 8.18 mit  $s(t)$  aus Aufg. 8.1

- a)  $T =$  Taktzeit auf dem Übertragungskanal  
 $\Rightarrow 2T =$  Rahmentaktzeit = Abtastperiode pro Tiefpasssignal  
 $\Rightarrow f_g \leq \frac{1}{4T} = 2 \text{ kHz}$  mit  $T = 125 \mu\text{s}$   
 keine Eigeninterferenzen, da mit  $\varphi_{ss}^E(\tau) = \Lambda(\tau/t_0)$  und  $t_0 = 1,25T$  gilt:  
 $\varphi_{ss}^E(n \cdot 2T) = 0$  für  $\forall n \neq 0$  (1. Nyquist-Kriterium)
- b)  $H(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) = \operatorname{rect}(2Tf)$   
 da keine Eigeninterferenzen auftreten
- c) Ersatzschaltung für "Nebensprechen"



$H_{12}(f) = \operatorname{rect}(2Tf) \cdot 2\varphi_{ss}^E(T) \cos(2\pi f T)$   
 mit  $\varphi_{ss}^E(T) = (t_0 - T)/t_0 = 0,2$  und  $f_g = \frac{1}{4T}$



$$\Rightarrow a = -20 \lg \frac{|H_{12}(f)|_{\max}}{|H(f)|_{\max}} = 7,96 \text{ dB}$$

8.8 a) PAM-Zeitmultiplex :

$$\text{Rahmentaktzeit: } T \stackrel{!}{\leq} \frac{1}{2f_g}$$

$$\Rightarrow \text{Taktzeit auf Kanal: } T_k = \frac{T}{Q} = \frac{1}{2f_g \cdot Q}$$

Q – Fernsprechsingnale

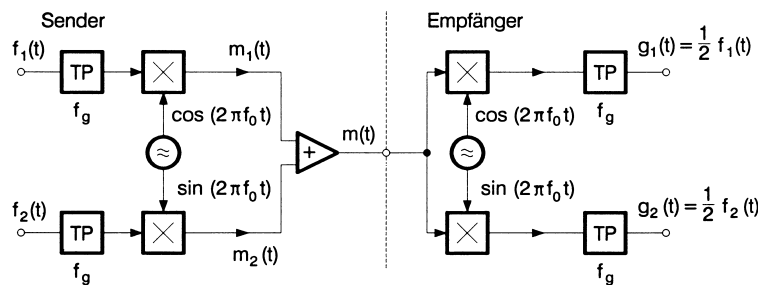
$$\Rightarrow \text{Bandbreitenbedarf: } f_k \geq \frac{1}{2T_k} = f_g \cdot Q = 400 \text{ kHz}$$

b) Frequenzmultiplex:

z. B. mit Einseitenband-Amplitudenmodulation

$$\Rightarrow f_k = f_g \cdot Q = 400 \text{ kHz}$$

8.9



$$m(t) = f_1(t) \cos(2\pi f_0 t) + f_2(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

bei kohärentem Empfang folgt:

$$m(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} f_1(t) \cdot [1 + \cos(4\pi f_0 t)] + \frac{1}{2} f_2(t) \cdot \sin(4\pi f_0 t)$$

$$m(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} f_1(t) \cdot \sin(4\pi f_0 t) + \frac{1}{2} f_2(t) [1 - \cos(4\pi f_0 t)]$$

nach Tiefpassfilterung bleibt:

$$g_1(t) = \frac{1}{2} f_1(t) \text{ und } g_2(t) = \frac{1}{2} f_2(t)$$

Übertragungsbandbreite:  $f_{\Delta} = 2f_g \hat{=} \text{halbe Bandbreite eines kohärenten Frequenzmultiplex-Systems nach Abb. 8.21}$

8.10 a) mit (8.74) und (8.75)

$$\varphi_{sd}^E(m) = \{7, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}$$

$$|S_d(k)|^2 = \{1, 8, 8, 8, 8, 8, 8\}$$

$$\text{b) Mittelwert } m_s = \sum_{n=0}^{M-1} s_{bd}(n) = -1 \text{ oder } |m_s| = |S_d(0)|^2 = 1.$$

Relative "unbalance"  $|m_s|/M = 1/7$

c) z. B.

$$\begin{aligned} s_{bd}(n) &= \{- - - + - + +\} \\ s_{bd}(n-1) &= \{+ - - - + - +\} \end{aligned}$$

---


$$s_{bd}(n) \cdot s_{bd}(n-1) = \{- + + - - - +\} = s_{bd}(n-3)$$

d) mit (8.78) für  $r = 3$  und  $a = 1 \Rightarrow 3/ggT(3, 1) = 3$  ungerade ist erfüllt, damit  $d = 3$  :

$$s_{2bd}(n) = s_{1bd}(3n) = \{- + + - + - -\}$$

$s_{2bd}(n)$  ist wieder eine  $m$ -Folge

$$\varphi_{12d}^E(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_{1bd}(n)s_{2bd}(n+m) = \{-5, -1, -1, 3, -1, 3, 3\}$$

Die Schrankenbeziehung (8.77) ergibt

$$|\varphi_{12d}^E(m)| \leq 2^{\text{ent}(3/2+1)} + 1 = 5$$

e)  $\left. \begin{aligned} s_{1bd}(n) &= \{- - - + - + +\} \\ s_{2bd}(n) &= \{- + + - + - -\} \\ s_{3bd}(n) &= \{+ - - - - - -\} \\ s_{4bd}(n) &= \{- - + + + - -\} \\ &| = \{- + - - + - +\} \\ &| = \{+ - + - + + +\} \\ &| = \{- + + - - + -\} \\ &| = \{+ + + + - - +\} \end{aligned} \right\} m - \text{Folgen}$

$$s_{9bd}(n) = \{+ + - + + + -\}$$

mit periodischen Korrelationsfunktionen z. B.

$$\varphi_{66d}^E(m) = \{ 7, -1, -5, 3, 3, -5, -1\}$$

$$\varphi_{76d}^E(m) = \{-1, -1, -1, -1, 3, -1, -1\}$$

$$\varphi_{81d}^E(m) = \{-1, -5, -1, 3, 3, -1, -1\}$$

**8.11**  $Q = 4 \Rightarrow M = 5$  prim

$$s_{1d}(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$s_{2d}(n) = \{1, 3, 5, 2, 4\}$$

$$s_{3d}(n) = \{1, 4, 2, 5, 3\}$$

$$s_{4d}(n) = \{1, 5, 4, 3, 2\}$$

---

z. B.  $s_{2d}(n-1) = \{4, 1, 3, 5, 2\}$   
 $s_{3d}(n-2) = \{2, 5, 3, 1, 4\}$  etc.

**8.12** a) FM-Signal:  $m(t) = \cos[2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t)]$

Modulationsindex:  $\mu = \frac{\Delta F}{f_g} = \frac{75 \text{ kHz}}{15 \text{ kHz}} = 5$

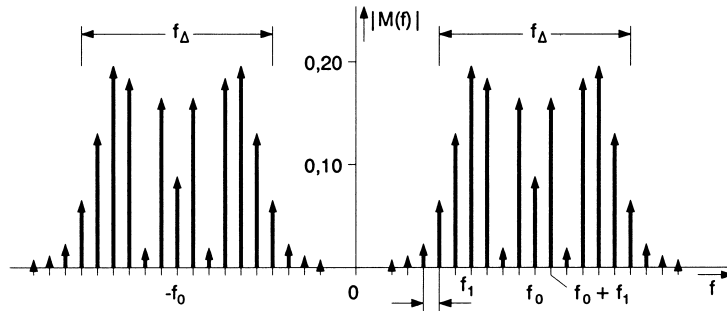
$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \cos[2\pi t(f_0 + n f_1)]$$



$$M(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \frac{1}{2} [\delta(f + f_0 + n f_1) + \delta(f - f_0 - n f_1)]$$

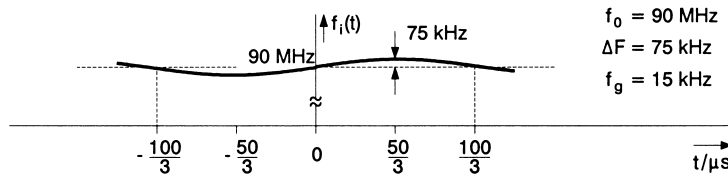
wobei

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{und} \quad J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$



Carson-Bandbreite:  $f_{\Delta} = 2(\mu + 1)f_g = 2(\Delta F + f_g) = 180 \text{ kHz}$

b)  $f_{i\text{FM}}(t) = f_0 + kf(t) = f_0 + \Delta F \sin(2\pi f_g t)$



$f_0 = 90 \text{ MHz}$   
 $\Delta F = 75 \text{ kHz}$   
 $f_g = 15 \text{ kHz}$

**8.13**  $m(t) = \cos(2\pi f_0 t) - a \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_1 t)$

für die Trägerfrequenz  $f_0$  gilt:

$$m_T(t) = 1 + j a \sin(2\pi f_1 t) \hat{=} \text{äquivalentes TP-Signal}$$

$$m(t) = |m_T| \cos[2\pi f_0 t + \Theta_T(t)]$$

$$m(t) = \sqrt{1 + a^2 \sin^2(2\pi f_1 t)} \cos[2\pi f_0 t + \arctan(a \sin 2\pi f_1 t)]$$

mit  $|a| \ll 1$  folgt:  $m(t) \approx \cos[2\pi f_0 t + a \sin(2\pi f_1 t)]$

**8.14**  $m(t) = \cos[2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t)]$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos^2[2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin[4\pi f_0 t + 2\mu \sin(2\pi f_1 t)] \right\} dt = 1/2 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man auch sofort sehen, da Leistung eines "ge-dehnten" Cosinussignals.

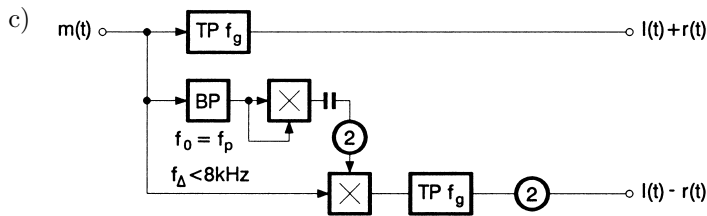
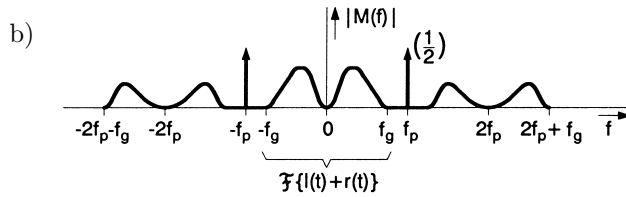
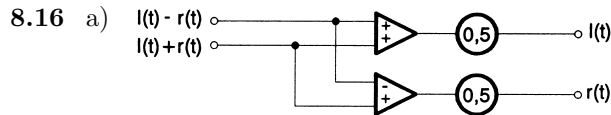
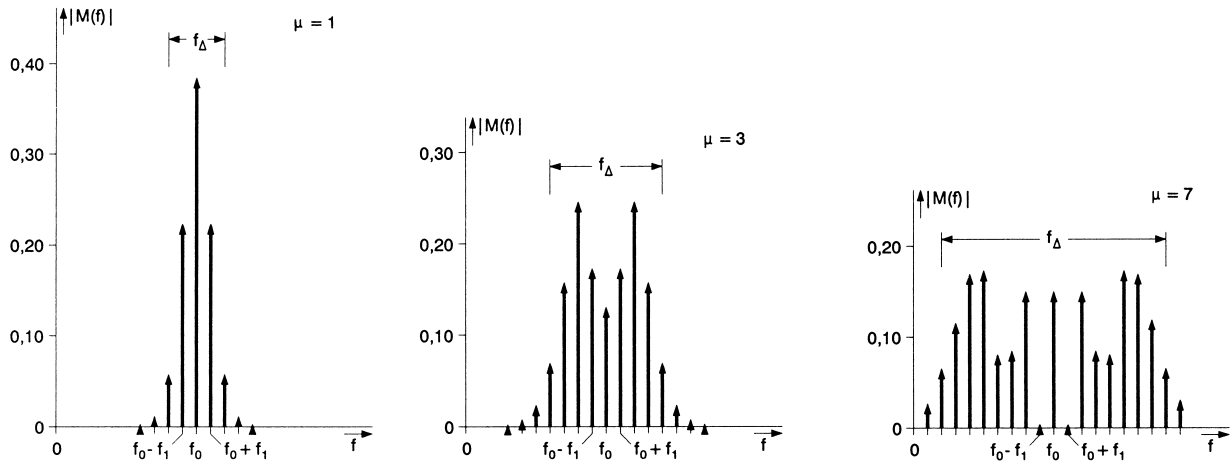
**8.15**  $m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \cos(2\pi f_0 t + n \cdot 2\pi f_1 t) \quad (8.28)$



$$M(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \frac{1}{2} [\delta(f - f_0 - n f_1) + \delta(f + f_0 + n f_1)] \quad (8.29)$$



Carson-Bandbreite  $f_{\Delta} = 2(\mu + 1)f_g$  mit  $f_g = f_1$



- d) Kompromiß zwischen
1. Bedingung: für fehlerfreie Rückgewinnung  $\Rightarrow f_p > f_g$
  2. Bedingung: kleine Übertragungsbandbreite  $\Rightarrow f_p$  möglichst klein
  3. Bedingung: billiger Bandpaß (niedrige Güte)  $\Rightarrow f_{\Delta}$  möglichst groß

8.17

$$S_t = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT) \right]^2 dt$$

$$= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{-T_0}^{T_0} s(t - nT) s(t - mT) dt \right]}_{=0 \text{ für } \forall n \neq m}$$

$$\Rightarrow S_t = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(t - nT)}_{\text{periodisch}} dt \quad \Rightarrow \text{Integration über eine Periode}$$

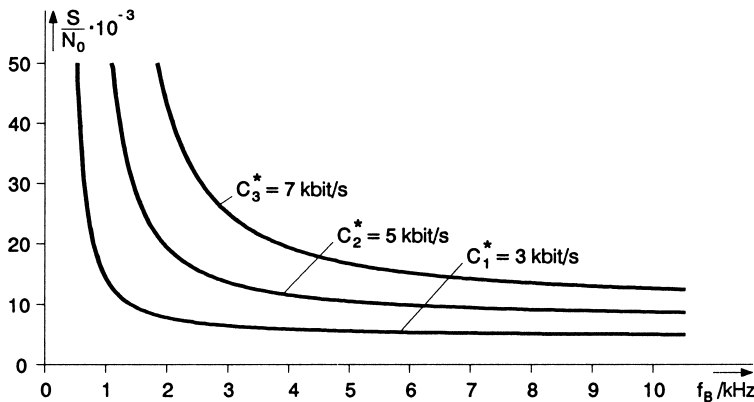
$$S_t = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(t - nT) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t - nT) dt = \frac{E}{T}$$

**8.18** mit  $\text{lb}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \text{lb}(e) \cdot \ln(x)$

$$C_{\infty}^* = \lim_{f_B \rightarrow \infty} \text{lb}(e) \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{S}{2f_B N_0}\right)}{1/f_B} \quad \text{mit l'Hospital, Typ } 0,0 \Rightarrow$$

$$C_{\infty}^* = \text{lb}(e) \lim_{f_B \rightarrow \infty} \frac{\frac{S}{-2N_0 f_B^2}}{\left(1 + \frac{S}{2f_B N_0}\right) \cdot \left(-\frac{1}{f_B^2}\right)} = \text{lb}(e) \cdot \frac{S}{2N_0}$$

$$C^* = f_B \text{lb}\left(1 + \frac{S}{2f_B N_0}\right) \Rightarrow \frac{S}{N_0} = 2f_B(2^{C^*/f_B} - 1)$$



**8.19**  $\left. \frac{S_a}{N} \right|_{\infty} = \lim_{f_{\Delta} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f_g}{f_{\Delta}} \frac{S_k}{2f_g N_0}\right)^{f_{\Delta}/f_g} - 1$

Substitution:  $x = f_{\Delta} \cdot \frac{2N_0}{S_k} \Rightarrow \frac{f_{\Delta}}{f_g} = x \cdot \frac{S_k}{2f_g N_0}$

wegen  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\Rightarrow \left. \frac{S_a}{N} \right|_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{S_k/(2f_g N_0)} - 1 = e^{S_k/(2f_g N_0)} - 1$$

**8.20**  $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = \frac{3}{8}$ ,

mit  $M = 4$  und  $L = 1$  in (8.91):

Entropie:  $H = -2\frac{1}{8}\text{lb}\left(\frac{1}{8}\right) - 2\frac{3}{8}\text{lb}\left(\frac{3}{8}\right)$

$$= \frac{1}{\lg(2)} \left[ \frac{1}{4}\lg(8) + \frac{3}{4}\lg\left(\frac{3}{8}\right) \right] = 1,81 \text{ bit/Zeichen}$$

Informationsfluß:

$$H^* = r \cdot H = 2f_g \text{ Zeichen/s} \cdot H \text{ bit/Zeichen} = 3,36 \frac{f_g}{\text{Hz}} \text{ bit/s}$$

maximale Entropie:

$$H_0 = \text{lb}(M) = 2 \text{ bit/Zeichen}$$

für gleichwahrscheinlich erzeugte Zeichen

absolute Redundanz:  $R = H_0 - H \approx 0,2 \text{ bit/Zeichen}$

relative Redundanz:  $R' = \frac{H_0 - H}{H_0} \hat{=} 10\%$

**8.21** a) Mit  $S/N \gg 1$  aus (8.97)

$$C^* \approx f_B \text{lb} \frac{S}{N} = f_B \frac{\text{lb}10}{10} \left( 10 \lg \frac{S}{N} \right)$$

und  $10/\text{lb}10 = 10 \lg 2 = 3,0103$

b) mit  $f_B = 4 \text{ kHz}$ :  $C^* \approx \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 40 \text{ kbit/s} = 53,3 \text{ kbit/s}$