Ohm, Lüke

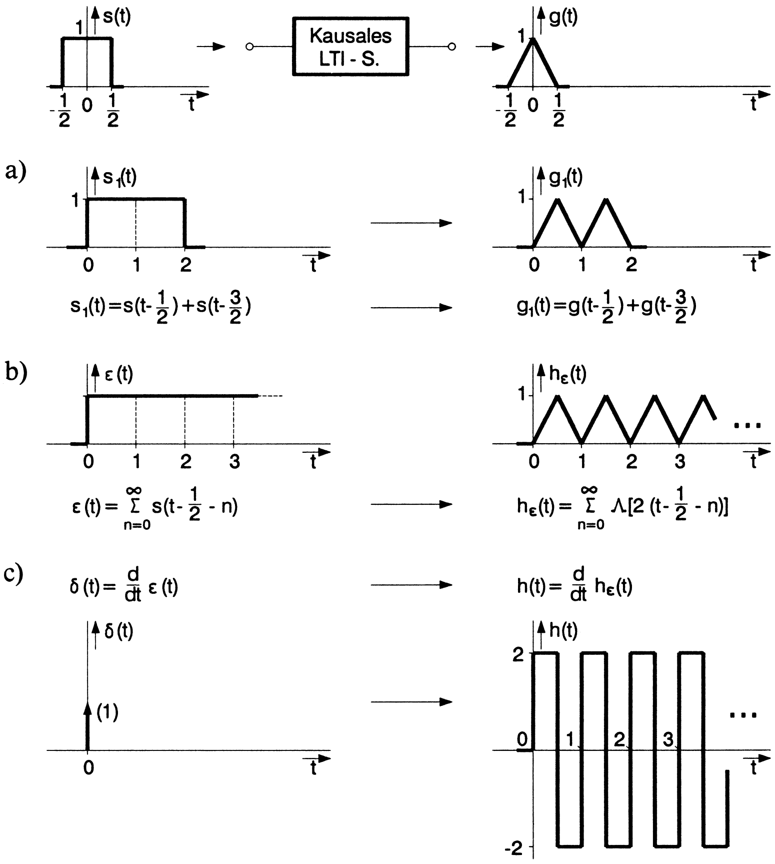
Signalübertragung

Musterlösungen zu den Aufgaben der Kapitel 1–13, 11. und 12. Auflage

Version: 28. Mai 2015

Zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1



Aufgabe 1.2

Linearität: $s(t) = \sum_i a_i s_i(t) \Rightarrow g(t) = \sum_i a_i g_i(t)$

a) $g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i a_i s_i(t) = \sum_i a_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s_i(t) = \sum_i a_i g_i(t) \quad \Rightarrow \quad$ linear

b) $g(t) = [s_1(t) + s_2(t)]^2 = s_1^2(t) + 2s_1(t)s_2(t) + s_2^2(t) \quad \neq g_1^2(t) + g_2^2(t) \quad \Rightarrow \quad$ nichtlinear

c) $g(t) = \sum_i a_i s_i(-t) = \sum_i a_i g_i(t) \quad \Rightarrow \quad$ linear

d) $g(t) = \sum_i a_i s_i(t) + 1 \neq \sum_i g_i(t) \quad \Rightarrow \quad$ nichtlinear

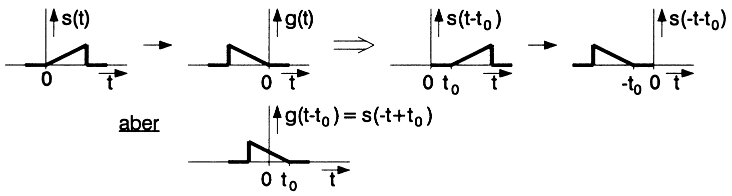
e) $g(f) = \sum_i a_i s_i(t) \cdot m(t) = \sum_i a_i g_i(t) \quad \Rightarrow \quad$ linear

Zeitinvarianz: $s(t - t_0) \Rightarrow g(t - t_0)$

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t - t_0) = g(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad$ zeitinvariant

b) $s^2(t - t_0) = g(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad$ zeitinvariant

c) mit $s(t) \rightarrow s(-t) = g(t) \Rightarrow s(t - t_0) \rightarrow s(-t - t_0)$
aber $g(t - t_0) = s(-t + t_0) \quad \Rightarrow \quad$ nicht zeitinvariant



d) $s(t-t_0)+1 = g(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad$ zeitinvariant

e) $s(t-t_0)m(t) \neq g(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad$ nicht zeitinvariant
für $m(t) \neq$ konstant

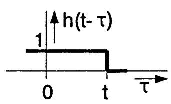
Aufgabe 1.3

a) linear, da $\int\limits_{-\infty}^{t} \sum\limits_i a_i s_i(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum\limits_i a_i \int\limits_{-\infty}^{t} s_i(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum\limits_i a_i g_i(t)$

zeitinvariant, da $\int\limits_{-\infty}^{t} s(\tau - t_0)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{t-t_0} s(\tau)\mathrm{d}\tau = g(t-t_0)$

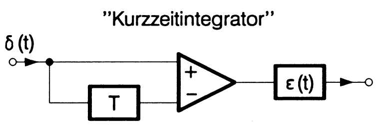
b) $s(t) * h(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \stackrel{!}{=} \int\limits_{-\infty}^{t} s(\tau)\mathrm{d}\tau$

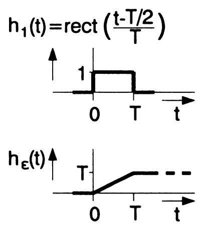
$$\Rightarrow h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \tau \leq t \\ 0 & \text{für} \quad \tau > t \end{cases}$$



$\Rightarrow h(t) = \varepsilon(t)$

c)





$s(t) \rightarrow g(t) = \int\limits_{t-T}^{t} s(\tau)\mathrm{d}\tau$

$\varepsilon(t) \rightarrow h_\varepsilon(t)$

Aufgabe 1.4

$$h_{\mathrm{RC}}(t) = \frac{1}{T}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t/T}$$

$$h(t) = h_{\mathrm{RC}}(t) * h_{\mathrm{RC}}(t) = \frac{1}{T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{e}^{-\tau/T}\mathrm{e}^{-(t-\tau)/T}\mathrm{d}\tau$$

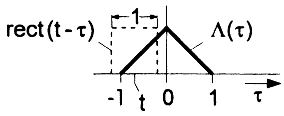
$$= \frac{1}{T^2}\mathrm{e}^{-t/T}\int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)\frac{t}{T^2}\mathrm{e}^{-t/T}$$

Aufgabe 1.5

$$s_1(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \Lambda(t)$$

$$s_2(t) = \Lambda(t) * \mathrm{rect}(t)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\tau)\mathrm{rect}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$



$$|t| > \frac{3}{2} \qquad s_2(t) = 0$$

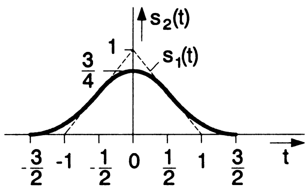
$$-\frac{3}{2}2 < t < -\frac{1}{2} \quad s_2(t) = \int\limits_{-1}^{t+1/2} (1+\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left(t+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \qquad s_2(t) = \int\limits_{t-1/2}^{0} (1+\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_{0}^{t+1/2} (1-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

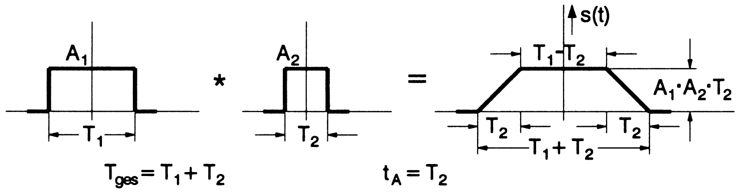
$$+\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \qquad s_2(t) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 \qquad [s_2(t) \text{ ist gerade!}]$$

$$s_2(0) = \frac{3}{4}, \qquad s_2\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



Aufgabe 1.6

a) $T_1 = 1,\ T_2 = T \quad (T_2 < T_1)$



b) für $0 < T < 1/2$ gilt:

$|t| > T + \frac{1}{2}$ $\qquad s(t) = 0$

$-\left(T + \frac{1}{2}\right) \leq t < -\frac{1}{2}$

$$s(t) = \int\limits_{-T}^{t+0,5} \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \mathrm{d}\tau = \frac{T}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2T}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

$-\frac{1}{2} \leq t < T - \frac{1}{2}$

$$s(t) = \frac{T}{2} + \int\limits_{0}^{t+0,5} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \mathrm{d}\tau = \frac{T}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2T}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

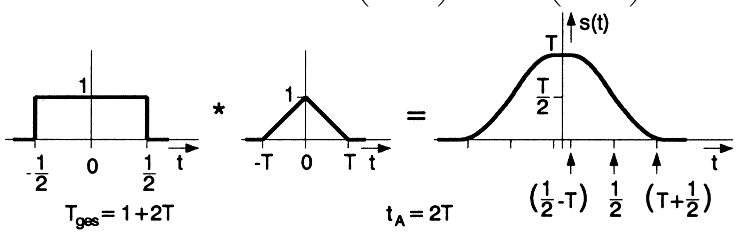
c) $T - \frac{1}{2} \leq t < -T + \frac{1}{2}$ $\qquad s(t) = T$

$-T + \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$

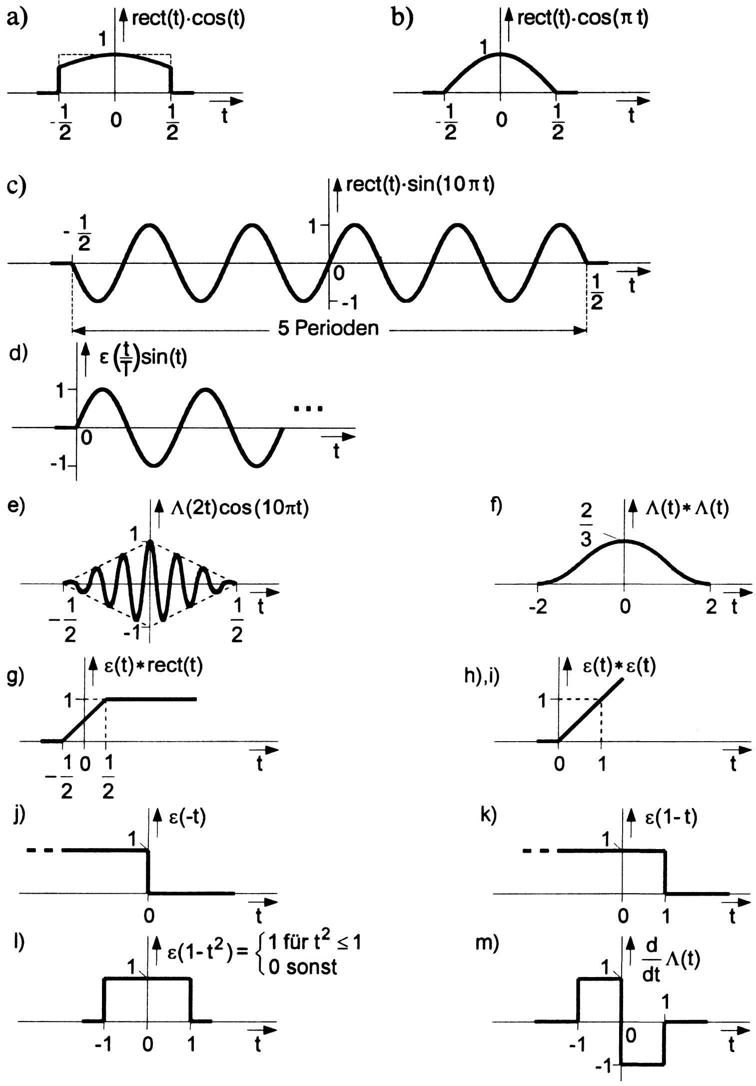
$$s(t) = \frac{T}{2} + \int\limits_{t-0,5}^{0} \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \mathrm{d}\tau = \frac{T}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2T}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

$\frac{1}{2} \leq t < T + \frac{1}{2}$

$$s(t) = \int\limits_{t-0,5}^{T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \mathrm{d}\tau = \frac{T}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2T}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

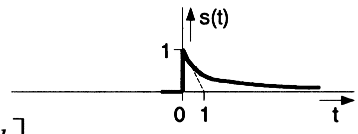


Aufgabe 1.7


a) rect(t)·cos(t)
b) rect(t)·cos(π t)
c) rect(t)·sin(10π t)
5 Perioden
d) ε(t/T)sin(t)
e) Λ(2t)cos(10πt)
f) Λ(t)∗Λ(t)
g) ε(t)∗rect(t)
h),i) ε(t)∗ε(t)
j) ε(-t)
k) ε(1-t)
l) ε(1-t²) = {1 für t² ≤ 1; 0 sonst}
m) d/dt Λ(t)

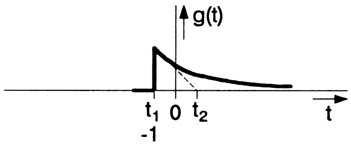
Aufgabe 1.8

$s(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-t}$

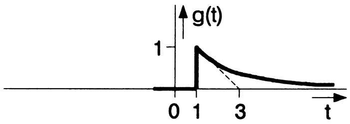


$$g(t) = s\left[\frac{t+b}{a}\right] \qquad t_1 = -b \Rightarrow s(0) \ ; \qquad t_2 = a-b \Rightarrow s(1)$$

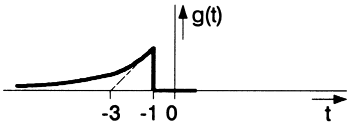
a=2 b=1



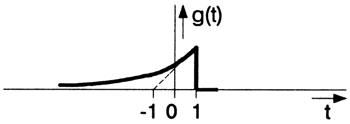
a=2 b=-1



a=-2 b=1



a=-2 b=-1

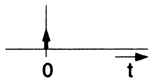


Aufgabe 1.9

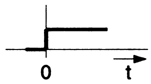
$s'(t) * h(t) = [\delta'(t) * s(t)] * h(t) = s(t) * \delta'(t) * h(t) = s(t) * h'(t)$ mit Assoziativgesetz und Kommutativgesetz der Faltungsalgebra.

Aufgabe 1.10

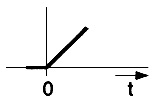
$n = 0 \qquad \delta'(t) * \varepsilon(t) = \delta(t)$



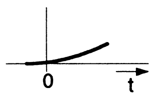
$n = 1 \qquad \delta'(t) * \varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$



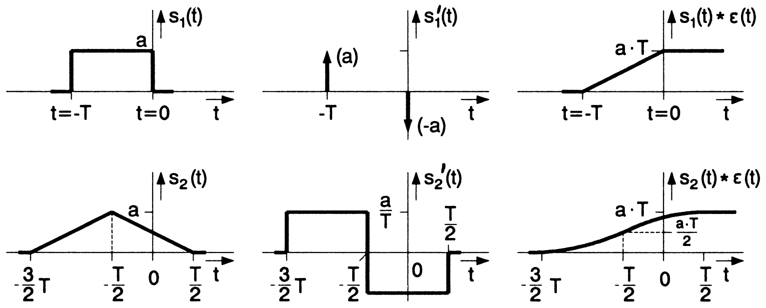
$n = 2 \qquad \varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \varepsilon(t) \cdot t$



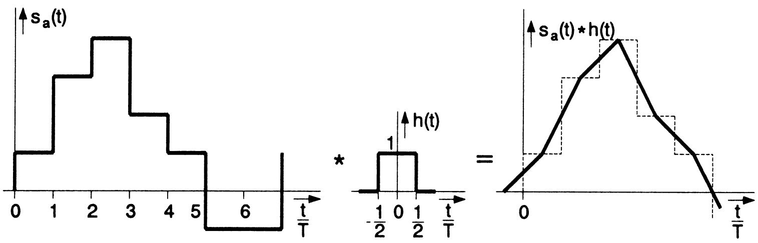
$n = 3 \qquad \varepsilon(t) \cdot \dfrac{t^2}{2}$



Aufgabe 1.11



Aufgabe 1.12



Aufgabe 1.13

$$\delta(bt-t_0)=\delta\left[b\left(t-\frac{t_0}{b}\right)\right]=\frac{1}{|b|}\delta\left(t-\frac{t_0}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(bt-t_0)\mathrm{d}t=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta\underbrace{\left(t-\frac{t_0}{b}\right)}_{t-\frac{t_0}{b}=0\Rightarrow t=\frac{t_0}{b}\uparrow}\mathrm{d}t=\frac{1}{|b|}s\left(\frac{t_0}{b}\right)$$

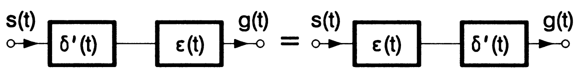
Aufgabe 1.14

mit (1.53) für $t\to\infty$ folgt $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$, damit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}a\delta(t)\mathrm{d}t=a\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=a$

Aufgabe 1.15

a) $$\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{rect}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\left[\delta\left(\tau+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}\tau$$
$$=\mathrm{rect}(t)=s(t)$$

b) $\left[s(t)*\delta'(t)\right]*\varepsilon(t)=[s(t)*\varepsilon(t)]*\delta'(t)=g(t)=s(t)$

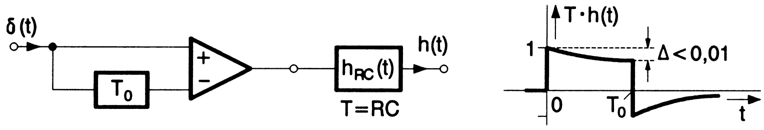


Aufgabe 1.16

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\underbrace{\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\mathrm{d}t\right]}_{A_g}\mathrm{d}\tau$$

$$= A_g \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\mathrm{d}\tau = A_g \cdot A_s$$

Aufgabe 1.17



$h_{\mathrm{RC}}(t) = \frac{1}{T}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t/T}$
$\Delta = 1 - \mathrm{e}^{-T_0/T} < 0,01 \Rightarrow T > 99,5\,T_0$

Aufgabe 1.18

a) $s(\tau) * [h(\tau) + g(\tau)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)[h(\tau)+g(\tau)]\mathrm{d}\tau$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= [s(\tau) * h(\tau)] + [s(\tau) * g(\tau)]$$

b) zu zeigen: $s(\tau) * [h(\tau) * g(\tau)] \stackrel{!}{=} [s(\tau) * h(\tau)] * g(\tau)$
also $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)h(\tau-u)g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \stackrel{!}{=} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-v)s(v-w)h(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v$
ist zu beweisen.
Beweis:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-v)s(v-w)h(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v \qquad \text{Subst.: } t-v=u$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} s[t-(u+w)]h(w)g(u)\mathrm{d}w\mathrm{d}u \qquad \text{Subst.: } u+w=\tau$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)h(\tau-u)g(u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u \qquad \text{q.e.d.}$$

Hinweis: Beweis ist einfacher im Frequenzbereich

Aufgabe 1.19

$h_\varepsilon(t)$ – monoton steigende Funktion

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_\varepsilon(t)}_{h(t)} \geq 0 \Rightarrow h(t) \geq 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 1.20

$$s(t) * h(t)\Big|_{t=0} = \int\limits_0^{+\infty} h(t)s(-t)\mathrm{d}t\,, \quad \text{da } h(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

1. Bed.: $|s(t)| = 1$ (max. Amplitude)

2. Bed.: $g(0)|_{\max} = \int\limits_0^{+\infty} |h(t)|\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow s(t) = \left\{ \begin{array}{r} -1 \text{ für } h(-t) < 0 \\ 1 \text{ für } h(-t) > 0 \end{array} \right\} = \operatorname{sgn}[h(-t)]$$

Aufgabe 1.21

$$\left[a_1 s_1\left(\frac{t-t_1}{T}\right)\right] * \left[a_2 s_2\left(\frac{t-t_2}{T}\right)\right]$$

$$= a_1 a_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1\left(\frac{\tau - t_1}{T}\right) s_2\left(\frac{t-t_2-\tau}{T}\right)\mathrm{d}\tau$$

Subst.: $\tau - t_1 = u$

$$= a_1 a_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1\left(\frac{u}{T}\right) s_2\left(\frac{t-t_1-t_2}{T} - \frac{u}{T}\right)\mathrm{d}u\,, \quad \frac{u}{T} = \Theta$$

$$= a_1 a_2 |T| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1(\Theta) s_2\left(\frac{t-t_1-t_2}{T} - \Theta\right)\mathrm{d}\Theta$$

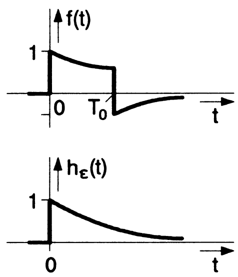
$$= a_1 a_2 |T| g\left(\frac{t-t_1-t_2}{T}\right)$$

Aufgabe 1.22

$$h(t) = \delta(t) - \frac{\varepsilon(t)}{T}\,\mathrm{e}^{-t/T} \qquad \text{mit } T = L/R$$

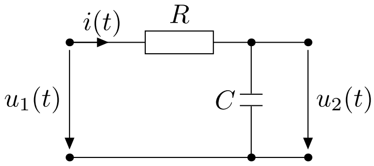
a) $$f(t) = h(t) * \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right) - \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right) * \left(\frac{\varepsilon(t)}{T}\mathrm{e}^{-t/T}\right)\right]$$
$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Abb. 1.16)}}}{g(t)} \qquad f(T_0) = \pm|1 - \mathrm{e}^{-T_0/T}|$$

b) $$h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t/T} = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$



Aufgabe 1.23

a)



$$u_1(t) = R \cdot i(t) + u_2(t); \qquad i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t)$$
$$u_1(t) = RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t) + u_2(t)$$
$$\text{mit } u_2(t) = \alpha\mathrm{e}^{-\beta t} + \gamma$$

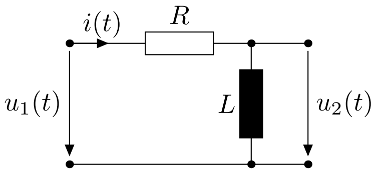
$$t > 0: 1 = RC \cdot (-\alpha\beta)\,\mathrm{e}^{-\beta t} + \alpha\mathrm{e}^{-\beta t} + \gamma$$
$$\Rightarrow \gamma = 1$$
$$\beta = \frac{1}{RC}$$
$$u_2(t) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + 1$$

$$t = 0: u_2(t) = 0 \overset{!}{=} \alpha \cdot \mathrm{e}^0 + 1$$
$$\Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow h_\varepsilon(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)$$

$$t < 0: u_1(t) = u_2(t) = 0 \quad \Rightarrow h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_\varepsilon(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \cdot \varepsilon(t) + \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right] \cdot \delta(t)$$
$$= \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

b)



$$u_1(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t); \qquad u_2(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)$$

$$\text{mit } i(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\beta t} + \gamma$$

$$\begin{aligned} t > 0 : 1 &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \\ &= R \cdot \left(\alpha \mathrm{e}^{-\beta t} + \gamma\right) - L \cdot \alpha\beta \mathrm{e}^{-\beta t} \\ &\Rightarrow \ \gamma = \frac{1}{R} \\ &\qquad \beta = \frac{R}{L} \\ &\qquad i(t) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{R} \end{aligned}$$

$$t = 0 : i(t) \stackrel{!}{=} 0 = \alpha \cdot \mathrm{e}^0 + \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \ \alpha = -\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \ i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) \cdot \varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned} u_2(t) = h_\varepsilon(t) \ &= L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \\ &= \frac{L}{R} \cdot \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_\varepsilon(t) = -\frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) + \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \delta(t) \\ &= \delta(t) - \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

Zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1

$$\mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right\} = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(p+\frac{1}{T}\right)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{p+\frac{1}{T}}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\right\} = \int\limits_0^T \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pT}\right)$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \left[\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right] * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \begin{cases} 0\,, & t<0 \\ T\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)\,, & 0 \le t \le T \\ T(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\,, & T<t \end{cases} \qquad ;\ \text{s. Kap. 1.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= T\int\limits_0^T \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t + T\left(\mathrm{e}-1\right)\int\limits_T^\infty \mathrm{e}^{-\left(p+\frac{1}{T}\right)t}\mathrm{d}t \\
&= T\int\limits_0^T \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t - \underbrace{T\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(p+\frac{1}{T}\right)t}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{p+\frac{1}{T}}} + T\mathrm{e}\int\limits_T^\infty \mathrm{e}^{-\left(p+\frac{1}{T}\right)t}\mathrm{d}t \\
&= T\frac{1}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pt}\right) - T\frac{1}{p+\frac{1}{T}} + T\mathrm{e}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{T}}\mathrm{e}^{-pt}\cdot\mathrm{e}^{-1} \\
&= \frac{T}{p} - \frac{T}{p+\frac{1}{T}} + T\left(\frac{T}{p+\frac{1}{T}} - \frac{1}{p}\right)\mathrm{e}^{-pt} \\
&= \frac{1}{p\left(p+\frac{1}{T}\right)} - \frac{1}{p\left(p+\frac{1}{T}\right)}\mathrm{e}^{-pt} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{T}}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-pt}\right) \\
&= \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

a) $s(t) = \sin(t)\cdot\varepsilon(t) \quad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad S(p) = \frac{1}{p^2+1}\,, \mathrm{Re}\{p\} > 0$
   rechtsseitig, kausal

b) $s(t) = \sin(t) \quad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad S(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \Rightarrow$ konvergiert <u>nicht</u>!

c) $s(t) = \mathrm{e}^{2t}\cdot\varepsilon(t-T) \quad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad S(p) = \frac{\mathrm{e}^{(2-p)T}}{p-2}\,, \mathrm{Re}\{p\} > 2$

d) $s(t) = t\cdot\mathrm{e}^{2t}\cdot\varepsilon(t)$ (kausal) $\quad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad S(p) = \frac{1}{(2-p)^2}\,, \mathrm{Re}\{p\} > 2$

e) $s(t) = \sinh(2t)\cdot\varepsilon(-t) \quad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad S(p) = \frac{2}{4-p^2}\,, \mathrm{Re}\{p\} < -2$

Aufgabe 2.3

$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} a_1 S_1(p) + a_2 S_2(p)$

Konvergenzbereich:
Schnittmenge der Konvergenzbereiche von $S_1(p)$ und $S_2(p)$. Es kann aber auch durch die Addition zur Auslöschung von Singularitäten kommen, so dass im Allgemeinen der gesamte Konvergenzbereich eine Obermenge der Schnittmenge der einzelnen Konvergenzbereiche ist (Beispiel s. Aufgabe 2.4).

Aufgabe 2.4

a) $S(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$ $\qquad p_{\mathrm{P}_1} = -1\,,\ p_{\mathrm{P}_2} = -2$
rechtsseitiges Signal $\Rightarrow$ Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{p\} > -1$

b) $G(p) = \frac{4}{p+3} - \frac{1}{p+1}$ $\qquad p_{\mathrm{P}_1} = -3\,,\ p_{\mathrm{P}_2} = -1$
rechtsseitiges Signal $\Rightarrow$ Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{p\} > -1$

c) $S(p) + G(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{4}{p+3}$ $\qquad p_{\mathrm{P}_1} = -2\,,\ p_{\mathrm{P}_2} = -3$
rechtsseitiges Signal $\Rightarrow$ Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{p\} > -2$
Anmerkung: Die Polstellen bei -1 heben sich gegenseitig auf. $\Rightarrow$ erweiterter Konvergenzbereich (s. Aufgabe 2.3).

Aufgabe 2.5

$s(t - t_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(p)\mathrm{e}^{-pt_0}$
Der Konvergenzbereich ändert sich nicht.
$s(t) \cdot \mathrm{e}^{p_0 t} \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(p - p_0)$
Der Konvergenzbereich verschiebt sich um $\mathrm{Re}\{p_0\}$ nach rechts.

Aufgabe 2.6

$s\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} |T|\, S(pT).$
Der Konvergenzbereich wird in gleicher Weise skaliert.

Aufgabe 2.7

$$S(p) = \frac{2-2p}{(p+1)(p+2)(p+5)}\,,\ \mathrm{Re}\{p\} > -1,\ \text{rechtsseitige Funktion}$$
$$\Rightarrow\ S(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+5}$$
$$s(t) = \varepsilon(t)\left[\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-5t}\right]$$

Aufgabe 2.8

$$S(p) = \frac{2p-1}{(p+1)^3(p+4)}\,,\ \mathrm{Re}\{p\} > -1, \text{rechtsseitige Funktion}$$

$$S(p) = -\frac{1}{3}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{p+4}$$

$$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$s(t) = \varepsilon(t)\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right]$$

Aufgabe 2.9

a) $H(f) = \frac{\mathrm{j}2\pi fT}{1+\mathrm{j}2\pi fT} \Rightarrow H(p) = \frac{pT}{1+pT} \quad \text{mit} \quad T = \frac{L}{R}$

b) $u_1(t) = A\sin(\omega_0 t)\cdot\varepsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} U_1(p) = \frac{A\omega_0}{p^2+\omega_0^2}\,,\ \mathrm{Re}\{p\} > 0$

c) $U_2(p) = U_1(p)\cdot H(p) = \frac{A\omega_0 p}{\left(p^2+\omega_0^2\right)\left(p+\frac{1}{T}\right)}$

d) $U_2(p) = a_1\frac{p}{p^2+\omega_0^2} + a_2\frac{1}{p^2+\omega_0^2} + a_3\frac{1}{p+\frac{1}{T}}$

mit $a_1 = \frac{A\omega_0 T}{1+\omega_0^2T^2}\,,\ a_2 = a_1\cdot\omega_0^2 T\,,\ a_3 = -a_1$

Konvergenzbereich: $\mathrm{Re}\{p\} > 0$, rechtsseitiges Signal

$u_2(t) = \left[a_1\cos(\omega_0 t) + \frac{a_2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + a_3\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right]\varepsilon(t)$

Aufgabe 2.10

a) $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{p^2+\frac{1}{T}p+\omega_0^2}$

mit $T = \frac{L}{R}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Polstellen: $p_{\mathrm{P}1,2} = -\underbrace{\frac{1}{2T}}_{a} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4T^2} - \omega_0^2}}_{b}$

i) $\frac{1}{4T^2} > \omega_0^2 : b\,\text{reell} \Rightarrow p_{\mathrm{P}1,2} = -a \pm b \qquad \Rightarrow \text{Konvergenzbereich } \mathrm{Re}\{p\} > -a+b$

ii) $\frac{1}{4T^2} < \omega_0^2 : b\,\text{imaginär} \Rightarrow p_{P1,2} = -a \pm \mathrm{j}b \qquad \Rightarrow \text{Konvergenzbereich } \mathrm{Re}\{p\} > -a$

Stabilität, wenn imaginäre Achse im Konvergenzbereich.

$\Rightarrow -a+b \overset{!}{<} 0 \qquad \text{und} \qquad a > 0\ ,$

$\Rightarrow T > 0\,,\ \frac{R}{L} > 0 \quad \text{und} \quad LC > 0$

$\Rightarrow$ passives RLC-System ist immer stabil!

b) $H(p) = \dfrac{\omega_0^2}{p^2+\frac{1}{T}p+\omega_0^2} \overset{!}{=} \dfrac{\omega_\mathrm{g}^2}{p^2+\sqrt{2}\omega_\mathrm{g}p+\omega_\mathrm{g}^2}$

$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \omega_\mathrm{g}^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{T} = \frac{R}{L} = \sqrt{2}\omega_\mathrm{g}$

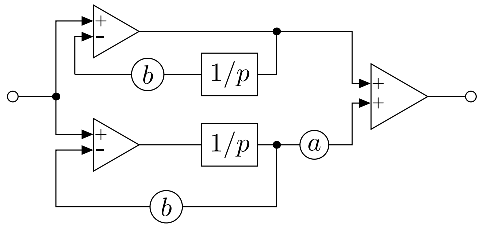
$\Rightarrow$ Polstellen: $p_{\mathrm{P}1,2} = -\frac{\omega_\mathrm{g}}{\sqrt{2}}\left[1\pm\mathrm{j}\right] \Rightarrow$ Pole liegen auf Kreis mit dem Radius $p = \omega_\mathrm{g}$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $\mathrm{Re}\{p\} > -\frac{w_\mathrm{g}}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 2.11

Mit (2.53):

$$H(p) = \frac{p+a}{p+b} = \frac{p}{p+b} + \frac{a}{p+b} = \frac{1}{1+\frac{b}{p}} + a \cdot \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{p}} + b}$$



Zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1

a) $s(t) = \text{reell}$; Periode T; $F = \dfrac{1}{T}$ Grundfrequenz

$$s_\mathrm{p}(t) = S_\mathrm{p}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2\pi kFt) - b_k\sin(2\pi kFt)]$$

wobei $a_k = \mathrm{Re}\{S_\mathrm{p}(k)\}$ und $b_k = \mathrm{Im}\{S_\mathrm{p}(k)\}$ $S_\mathrm{p}(k) = a_k + \mathrm{j}b_k$

$$S_\mathrm{p}(k) = \frac{1}{T}\int_0^T s_\mathrm{p}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kFt}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T_\mathrm{b}/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kFt}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T-\frac{T_\mathrm{b}}{2}}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kFt}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow S_\mathrm{p}(k) = \tfrac{T_\mathrm{b}}{T}\frac{\sin\left(2\pi kF\frac{T_\mathrm{b}}{2}\right)}{2\pi kF\frac{T_\mathrm{b}}{2}} = \tfrac{T_\mathrm{b}}{T}\mathrm{si}\left(\pi k\tfrac{T_\mathrm{b}}{T}\right)$$

$S_\mathrm{p}(0) = \dfrac{T_\mathrm{b}}{T}$ „Gleichanteil“ $a_k = S_\mathrm{p}(k)$ $b_k = 0$

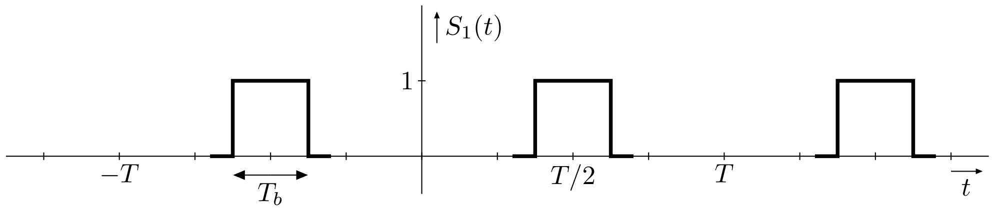
$s_\mathrm{p}(t) = s_\mathrm{p}(-t)$; $s_\mathrm{p}(t)$ (reelle) gerade Funktion

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_\mathrm{p}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kFt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_\mathrm{p}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kF(-t)}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_\mathrm{p}(-k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kFt}$$

$\Rightarrow S_\mathrm{p}(k) = S_\mathrm{p}(-k)$, weiter: gerades Spektrum bei *reellen* Signalen

$\Rightarrow S_\mathrm{p}(k) = S_\mathrm{p}^*(-k)$ $\Rightarrow \mathrm{Im}\{S_\mathrm{p}(k)\} = 0$

b)



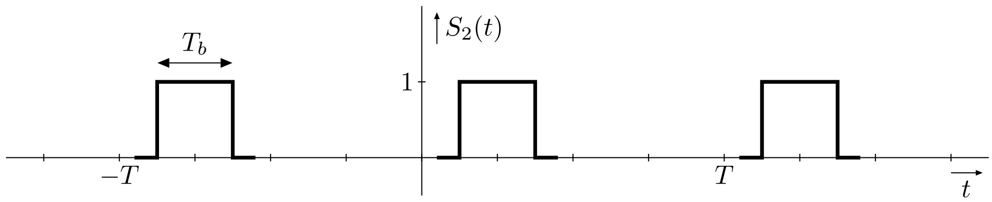
Verschiebung: $s(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi t_0}$

$$\Rightarrow S_{1,\mathrm{p}}(k) = S_\mathrm{p}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{T}\frac{T}{2}} = S_\mathrm{p}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} = S_\mathrm{p}(k)\cdot(-1)^k$$

$$S_{1,\mathrm{p}}(k) = (-1)^k\frac{T_\mathrm{b}}{T}\mathrm{si}\left(\pi k\frac{T_\mathrm{b}}{T}\right)$$

$s_1(t)$ ist gerade $\Rightarrow a_k = S_{1,\mathrm{p}}(k)$; $b_k = 0$

c)

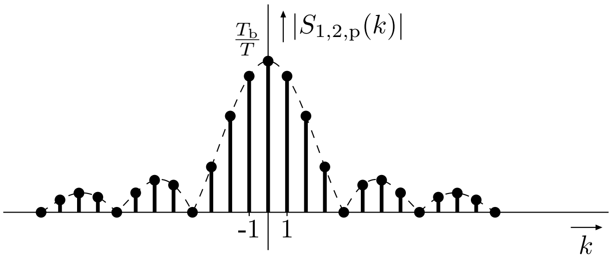


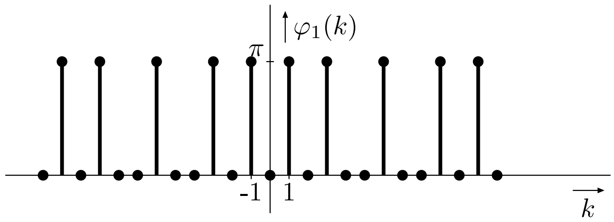
$$\Rightarrow S_{2,\mathrm{p}}(k) = S_\mathrm{p}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{T}\frac{T}{4}} = S_\mathrm{p}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k} = S_\mathrm{p}(k)\cdot(-\mathrm{j})^k$$
$$= (-\mathrm{j})^k\frac{T_\mathrm{b}}{T}\mathrm{si}\left(\pi k\frac{T_\mathrm{b}}{T}\right)$$

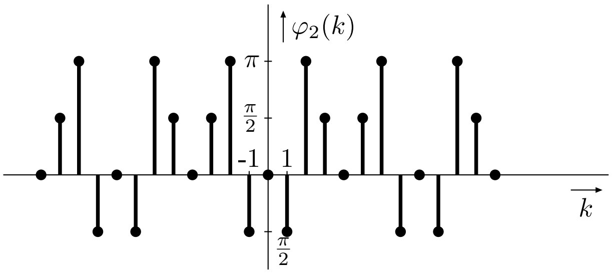
$s_2(t)$ ist weder gerade noch ungerade

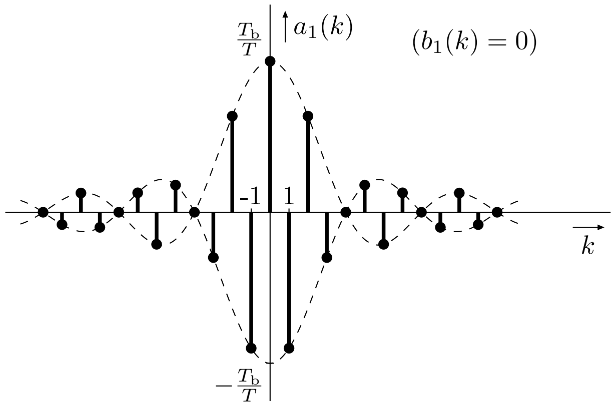
$$a_k = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^k\right) S_{2,\mathrm{p}}(k) \qquad (= 0 \text{ für k ungerade})$$

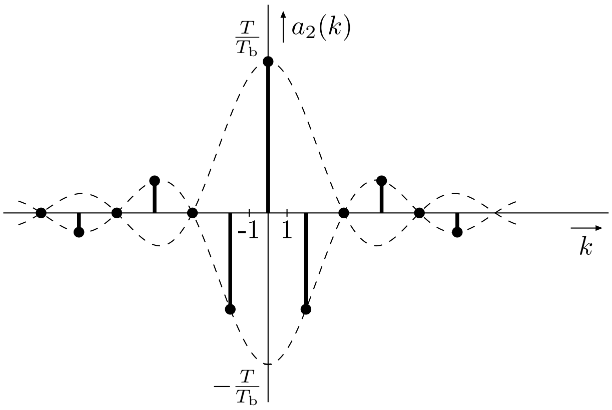
$$b_k = \frac{\mathrm{j}}{2}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) S_{2,\mathrm{p}}(k) \qquad (= 0 \text{ für k gerade})$$

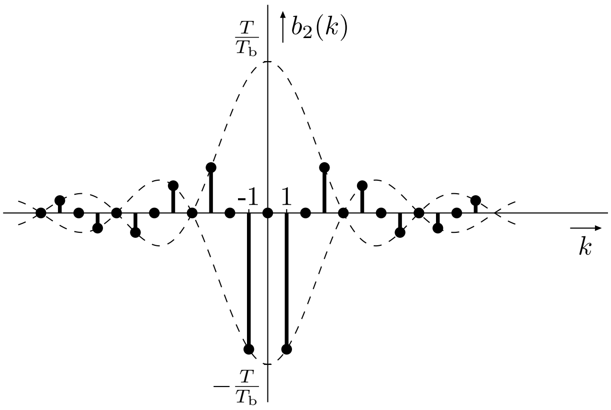












d) $S_p(k) = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{t}{T/2} e^{-j2\pi kFt} dt = j\frac{\cos(\pi k)}{\pi k} = j\frac{(-1)^k}{\pi k} = jb_k$

$s_p(t) = -s_p(-t)$ (ungerade, reelle Funktion)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k) e^{j2\pi kFt} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k) e^{j2\pi kF(-t)} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(-k) e^{j2\pi kFt}$$

$\Rightarrow S_p(k) = -S_p(-k)$, mit $S_p(k) = S_p^*(-k)$ bei *reellen* Funktionen

$\Rightarrow \mathrm{Re}\{S_p(k)\} = 0!$

e) $S_p(k) = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{0} \frac{t}{T/2} e^{-j2\pi kFt} dt + \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{t}{T/2}\right) e^{-j2\pi kFt} dt$

$S_p(k) = \frac{1-\cos(\pi k)}{\pi^2 k^2} - j\frac{1-\cos(\pi k)}{2\pi k} = a_k + jb_k$

$S_p(k) = 0$ für $k = 2n \Rightarrow$ alle geradzahligen Koeffizienten verschwinden!

$S_p(0) = 0$

„*vollständig symmetrische*“Funktion: $s_p\left(t + \frac{T}{2}\right) = -s_p(t)$

alle geraden Koeffizienten $s_p(2k)$ der Fourier-Reihe verschwinden.

$s_p(t) = -s_p\left(t + \frac{T}{2}\right)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k) e^{j2\pi kFt} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k) e^{j2\pi kF(t+\frac{T}{2})}$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k) e^{j2\pi kFt} \cdot \underbrace{e^{j2\pi kF\cdot\frac{T}{2}}}_{=e^{jk\pi}=(-1)^k}$$

$\Rightarrow S_p(k) = -S_p(k) \cdot (-1)^k$

nur erfüllbar für ungerade k!

f) i) $S_p(0) = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_p(t) dt = \frac{1}{2}$

ii) $s_\mathrm{p}(t) = s_\mathrm{p}(-t)$, gerade Funktion $\Rightarrow \mathrm{Im}\{S_\mathrm{p}(k)\} = 0$
(Fourier-Reihe ist reellwertig)

$$f_\mathrm{p}(t) = s_\mathrm{p}(t) - S_\mathrm{p}(0) = -f_\mathrm{p}\left(t + \frac{T}{2}\right) \qquad \text{vollständige Symmetrie wie in e)}$$

$$\Rightarrow F_\mathrm{p}(2k) = S_\mathrm{p}(2k) = 0$$

alle geraden Fourier-Reihenkoeffizienten verschwinden.

iii) $$S_\mathrm{p}(k) = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{0} \frac{t + T/2}{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kFt}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} \frac{-t + T/2}{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kFt}\mathrm{d}t$$

$$S_\mathrm{p}(k) = \frac{1 - \cos(\pi k)}{\pi^2 k^2}$$

d.h. reellwertig, und geradzahlige Vielfache der Grundfrequenz F verschwinden.

Aufgabe 3.2

a) $$u(t) = \left(\frac{t}{\frac{T}{2}}\right)^2 \quad \text{für} \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

b) $$\bar{u} = U(0) = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

c) $$u(t) = \frac{1}{\pi^2}s\left(t \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \quad \text{mit} \quad F = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos(2\pi Ft)}{1^2} - \frac{\cos(4\pi Ft)}{2^2} + \frac{\cos(6\pi Ft)}{3^2} - \cdots\right)$$

$$\Rightarrow S_\mathrm{p}(k) = \frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{k^2} \qquad \text{reell!}$$

f) $$L_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_\mathrm{p}(k)|^2 = S_\mathrm{p}^2(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |S_\mathrm{p}(k)|^2 = S_\mathrm{p}^2(0) + 2\frac{4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$U_\mathrm{eff} = \sqrt{L_s} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ oder } U_\mathrm{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} s_\mathrm{p}^2(t)\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 3.3

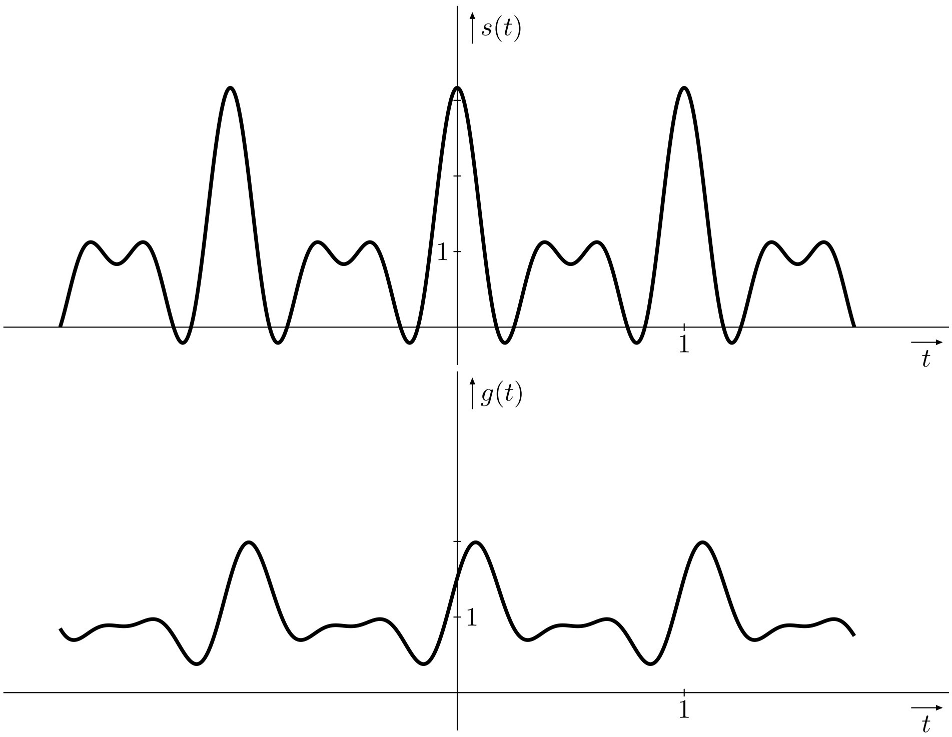
$$s(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{3} S_\mathrm{p}(k)\cos(2\pi kt)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi fRC} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}f}; \quad RC = \frac{1}{2\pi}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}}; \quad \varphi(f) = \arctan(-f)$$

f	$\lvert H(f)\rvert$	$\varphi(f)$
0	1	0
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-45°$
2	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-63{,}4°$
3	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$-71{,}6°$

$$\Rightarrow g(t) = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} S_{\mathrm{p}} |H(k)| \cos(2\pi k t + \varphi(k))$$



Aufgabe 3.4

a) **Zeitbereich:**

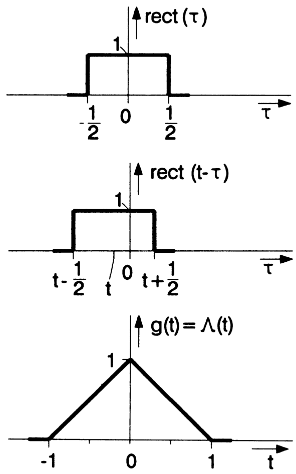
$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\tau)\mathrm{rect}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Bereich I: $-\infty \leq t < -1$ $\quad g(t) = 0$ keine Überlappung

Bereich II: $-1 \leq t < 0$ $\quad g(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} \mathrm{d}\tau = t + 1$

Bereich III: $0 \leq t < 1$ $\quad g(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} \mathrm{d}\tau = -t + 1$

Bereich IV: $1 \leq t < \infty$ $\quad g(t) = 0$



Frequenzbereich:

$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \mathrm{si}(\pi f) \cdot \mathrm{si}(\pi f)$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{si}^2(\pi f)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{si}^2(\pi f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}f$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 \Big(\cos(2\pi f t) - \mathrm{j}\sin(2\pi f t)\Big)\,\mathrm{d}f$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 \cos(2\pi f t)\mathrm{d}f\,, \text{da } \sin(2\pi f t) \text{ ungerade}$$

$$= \ldots \qquad \text{(also schwieriger)}$$

b) **Zeitbereich:**

$$\mathrm{si}(\pi t) * \mathrm{si}(\pi t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{si}(\pi t)\mathrm{si}[\pi(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \frac{\sin[\pi(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \ldots \text{ (also schwieriger)}$$

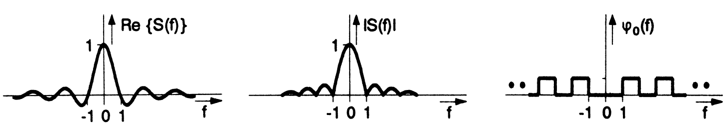
Frequenzbereich:

$$\mathrm{si}(\pi t) * \mathrm{si}(\pi t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}(f) \cdot \mathrm{rect}(f) = \mathrm{rect}(f) \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \mathrm{si}(\pi t)$$

Aufgabe 3.5

a) $s(t) = \mathrm{rect}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(f) = \mathrm{si}(\pi f)\,,$

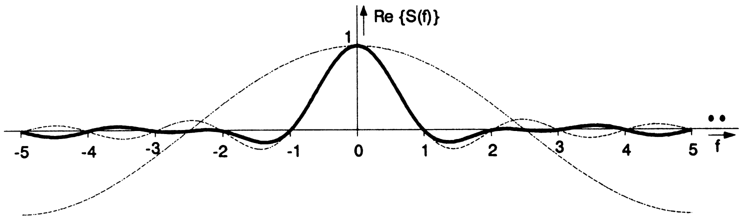
$$\varphi_0(f) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathrm{Re}\{S(f)\} \geq 0 \\ \pi & \text{für } \mathrm{Re}\{S(f)\} < 0 \end{cases}$$

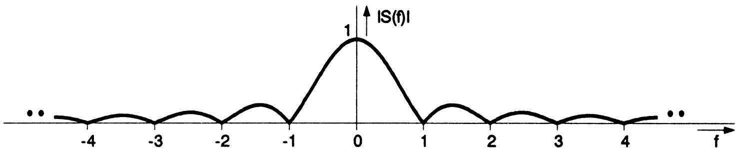


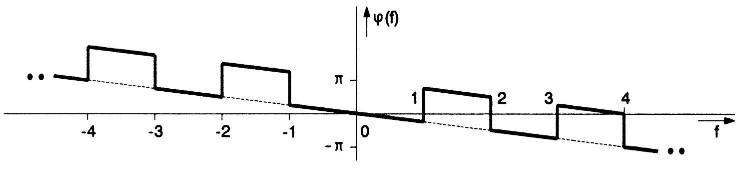
b) $s(t) = \mathrm{rect}(t - 0{,}1) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(f) = \mathrm{si}(\pi f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \cdot 0{,}1}$

$$\mathrm{Re}\{S(f)\} = \mathrm{si}(\pi f)\cos(2\pi f \cdot 0{,}1) \qquad |S(f)| = |\mathrm{si}(\pi f)|$$

Phase: $\varphi(f) = \varphi_0(f) - 0{,}2\pi f$







Aufgabe 3.6

$$as(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} aS(f)$$

$$as\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} a|T|S(Tf)$$

$$as\left[\frac{1}{T}(t-t_0)\right] \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} a|T|S(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}$$

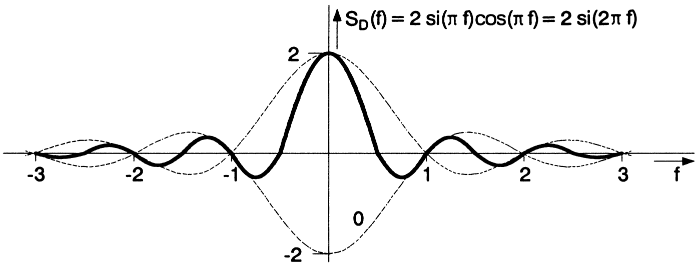
Aufgabe 3.7

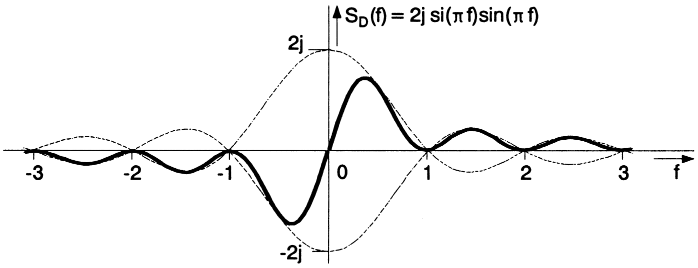
$$s_\mathrm{D}(t) = s(t+t_0) \pm s(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S_\mathrm{D}(f) = S(f)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_0} \pm \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}]$$

$$S_\mathrm{D}(f) = 2S(f) \cdot \begin{cases} \cos(2\pi t_0 f) \\ \mathrm{j}\sin(2\pi t_0 f) \end{cases}$$

$$s(t) = \mathrm{rect}(t)\,, \quad t_0 = 1/2 \Rightarrow S(f) = \mathrm{si}(\pi f)$$

$$\Rightarrow S_\mathrm{D}(f) = \mathrm{si}(\pi f) \cdot \begin{cases} 2\cos(\pi f) \\ \mathrm{j}\,2\sin(\pi f) \end{cases}$$





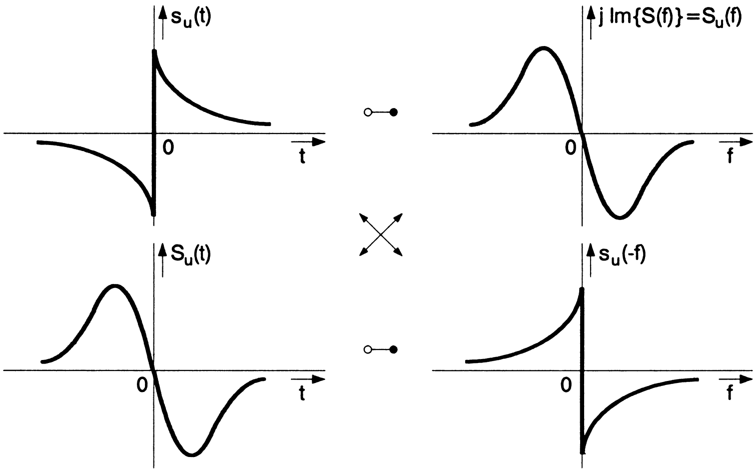
Aufgabe 3.8

$$s(t) = \frac{1}{T}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t/T} \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad S(f) = \frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi Tf} = \frac{1-\mathrm{j}2\pi Tf}{1+4\pi^2 f^2 T^2}$$

$$s_{\mathrm{g}}(t) = \frac{1}{2T}\mathrm{e}^{-|t|/T} \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \mathrm{Re}\{S(f)\} = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2 T^2}$$

$$s_u(t) = \frac{1}{2T}\mathrm{sgn}(t)\mathrm{e}^{-|t|/T} \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \mathrm{jIm}\{S(f)\} = \frac{-\mathrm{j}2\pi Tf}{1+4\pi^2 f^2 T^2} = S_u(f)$$

$$S_u(t) = \frac{-\mathrm{j}2\pi Tf}{1+4\pi^2 f^2 T^2} \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad s_u(-f) = \frac{1}{2T}\,\mathrm{sgn}(-f)\mathrm{e}^{-|f|/T}$$



Aufgabe 3.9

$$S(f-F) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}$$

$$S(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \qquad \text{Fouriertransformation}$$

$$s_1(t) = s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S_1(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi(f-F)t)}\mathrm{d}t = S(f-F)$$

Aufgabe 3.10

$$s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}, \quad s(t) \text{ gerade } \Rightarrow S(f) = \mathrm{Re}\{S(f)\}$$

$$S(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{-4\pi^2 f^2}{4\pi}\right) = \mathrm{e}^{-\pi f^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \mathrm{e}^{-\pi f^2}$$

Aufgabe 3.11

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \mathrm{e}^{-\pi f^2}$$

$$s_1(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2} * \mathrm{e}^{-\pi t^2} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S_1(f) = \mathrm{e}^{-2\pi f^2} = \mathrm{e}^{-\pi(\sqrt{2}f)^2}$$

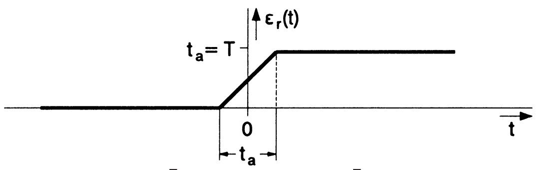
mit $|b|s(bt) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(f/b)$ folgt mit $b = 1/\sqrt{2}$

$$s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi(t/\sqrt{2})^2}$$

$$s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\mathrm{e}^{-\pi t^2/(n+1)} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S_n(f) = \mathrm{e}^{-\pi f^2(n+1)}$$

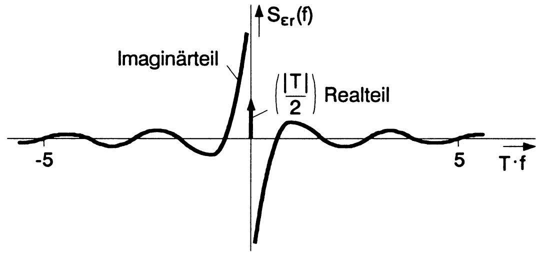
Aufgabe 3.12

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(t) = \varepsilon(t) * \mathrm{rect}(t/T) \qquad t_{\mathrm{a}} = 1\,\mu s \qquad t_{\mathrm{a}} = T$$



$$\Rightarrow S_{\varepsilon_{\mathrm{r}}}(f) = \left[\frac{1}{2}\delta(f) - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi f}\right]|T|\mathrm{si}(\pi Tf)$$

$$= \frac{1}{2}|T|\delta(f) - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi f}|T|\mathrm{si}(\pi f)$$



Aufgabe 3.13

$$s(t) = \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t/T}\cos(2\pi F t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(f) = \frac{T}{1+\mathrm{j}2\pi T f} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-F) + \frac{1}{2}\delta(f+F)\right]$$

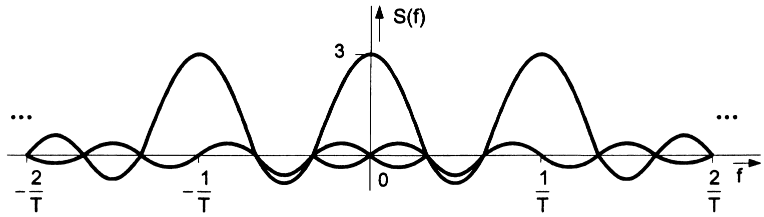
Aufgabe 3.14

$$s(t)\sum_{n=-k}^{k}\delta(t-nT) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{(2k+1)T}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

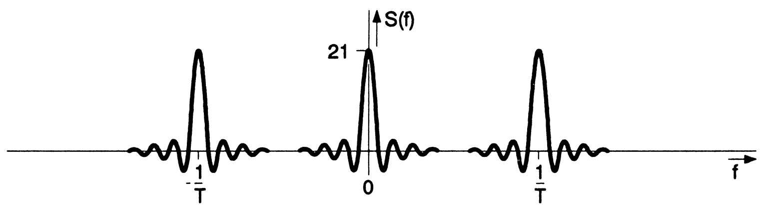
$$\updownarrow L$$

$$S(f) = (2k+1)|T|\mathrm{si}[\pi f(2k+1)T] * \left[\frac{1}{|T|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)\right]$$

k = 1 : $S(f) = 3|T|\mathrm{si}(\pi f 3T) * ⊥⊥⊥\,(Tf)$



k = 10 : $S(f) = 21|T|\mathrm{si}(\pi f 21T) * ⊥⊥⊥\,(Tf)$



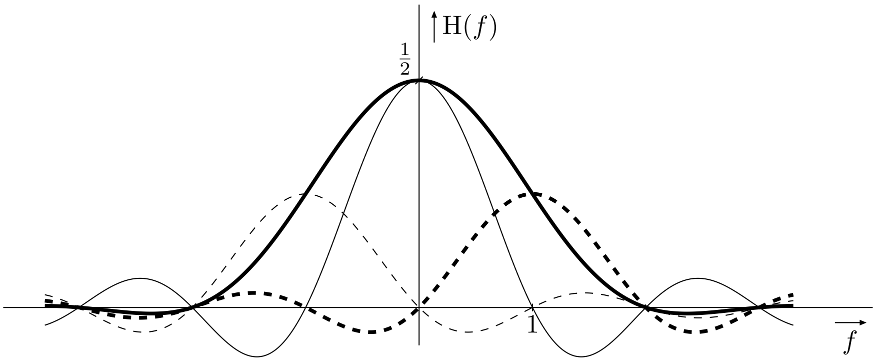
Aufgabe 3.15

$$h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\left[1+\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$H(f) = \frac{1}{2}|T|\mathrm{si}\,(\pi f T) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{T}\right)\right]$$

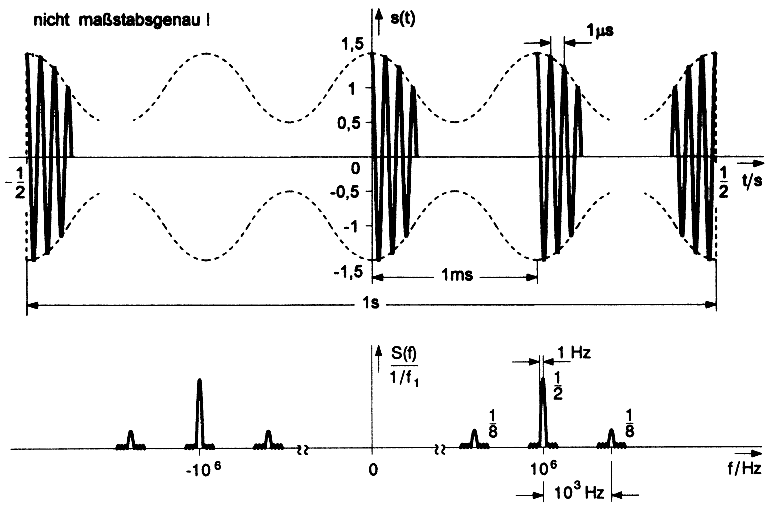
$$= \frac{|T|}{2}\mathrm{si}\,(\pi f T) + \frac{|T|}{4}\mathrm{si}\,(\pi\,[fT+1]) + \frac{|T|}{4}\mathrm{si}\,(\pi\,[fT-1])$$



Aufgabe 3.16

$s(t) = \mathrm{rect}(f_1 t)\,\{[1 + 0,5\cos(2\pi f_2 t)]\cos(2\pi f_3 t)\}$

$S(f) = \frac{1}{f_1}\mathrm{si}\left(\pi\frac{f}{f_1}\right) * \left[\left\{\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f - f_2) + \frac{1}{4}(f + f_2)\right\} * \left\{\frac{1}{2}\delta(f - f_3) + \frac{1}{2}\delta(f + f_3)\right\}\right]$



Aufgabe 3.17

für $s(t)$ reell folgt:

$$\begin{array}{ll} s(t) & = s_{\mathrm{g}}(t) \quad + \quad s_{\mathrm{u}}(t) \\ \updownarrow L & \quad \updownarrow L \qquad\quad \updownarrow L \\ S(f) & = \underbrace{\mathrm{Re}\{S(f)\}}_{\text{gerade}} + \mathrm{j}\,\underbrace{\mathrm{Im}\{S(f)\}}_{\text{ungerade}} \\ S(-f) & = \mathrm{Re}\{S(f)\} - \mathrm{Im}\{S(f)\} \\ \Rightarrow S(-f) & = S^*(f) \end{array}$$

Aufgabe 3.18

$$s(t) = [\mathrm{rect}(t) + \Lambda(2t)] * [\delta(t - 1{,}5) + \delta(t + 1{,}5) + \delta(t - 3{,}5) + \delta(t + 3{,}5)]$$

$$\updownarrow L$$

$$S(f) = \left[\mathrm{si}(\pi f) + \frac{1}{2}\mathrm{si}^2\left(\pi\frac{f}{2}\right)\right] \cdot [2\cos(2\pi 1{,}5 f) + 2\cos(2\pi 3{,}5 f)]$$

Aufgabe 3.19

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t \qquad \text{mit} \qquad s(t) = \delta(t)$$

$$S_\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^0 = 1$$

Aufgabe 3.20

$$\begin{aligned} S_1(f) * S_2(f)|_{f=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi)S_2(f-\xi)\mathrm{d}\xi|_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi)S_2(-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi)S_2^*(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &\text{da } s_{1,2}(t) \text{ reell!} \end{aligned}$$

mit $S_1(f) * S_2(f) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} s_1(t) \cdot s_2(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_1(f) * S_2(f)|_{f=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t|_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \cdot S_2^*(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t)\mathrm{d}t \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 3.21

$$|S_\mathrm{T}(f)| = \left| \int_0^\mathrm{T} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t \right|$$

a) $$S_\mathrm{T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \mathrm{rect}\left[\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t$$

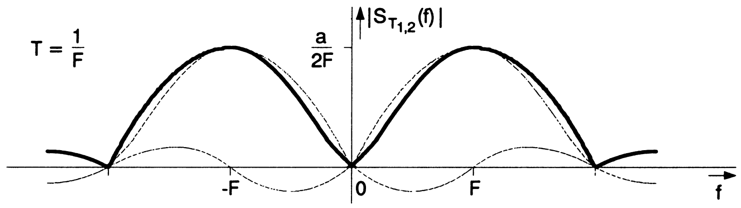
$$= S(f) * [|T|\mathrm{si}(\pi f T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T/2}]$$

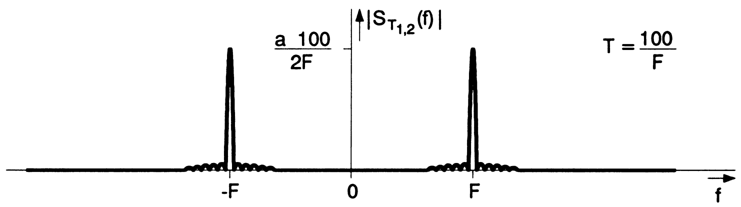
mit $s_1(t) = a\cos(2\pi F t)$

$\Rightarrow S_{\mathrm{T}_1}(f) = \left[\frac{a}{2}\delta(f+F) + \frac{a}{2}\delta(f-F)\right] * [|T|\mathrm{si}(\pi f T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T/2}]$

mit $s_2(t) = a\sin(2\pi F t)$

$\Rightarrow S_{\mathrm{T}_2}(f) = \mathrm{j}\left[\frac{a}{2}\delta(f+F) - \frac{a}{2}\delta(f-F)\right] * [|T|\mathrm{si}(\pi f T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T/2}]$





Aufgabe 3.22

a) $s_g(t) = \dfrac{1}{2}\left[s(t) + s^*(-t)\right] \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{2}\left[S(f) + S^*(f)\right] = \mathrm{Re}\{S(f)\}$

$s_u(t) = \dfrac{1}{2}\left[s(t) - s^*(-t)\right] \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{2}\left[S(f) - S^*(f)\right] = \mathrm{jIm}\{S(f)\}$

b) mit (3.107) folgt:

$$s_+(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{\mathrm{j}}{2}s(t)*\frac{1}{\pi t} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\{s(t)\} - \mathrm{Im}\{s(t)\} * \frac{1}{\pi t}\right]}_{\mathrm{Re}\{s_+(t)\}} + \underbrace{\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\mathrm{Im}\{s(t)\} + \mathrm{Re}\{s(t)\} * \frac{1}{\pi t}\right]}_{\mathrm{jIm}\{s_+(t)\}}$$

und weiter mit (3.109): $\mathrm{Im}\{s_+(t)\} = -\mathrm{Im}\{s_+(t)\} * \dfrac{1}{\pi t} * \dfrac{1}{\pi t} \Rightarrow \dfrac{1}{\pi t} * \dfrac{1}{\pi t} = -\delta(t)$

$\mathrm{Re}\{s_+(t)\} * \dfrac{1}{\pi t} = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\{s(t)\} - \mathrm{Im}\{s(t)\} * \dfrac{1}{\pi t}\right] * \dfrac{1}{\pi t} = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Im}\{s(t)\} + \mathrm{Re}\{s(t)\} * \dfrac{1}{\pi t}\right] =$ $\mathrm{Im}\{s_+(t)\}$

und ähnlich

$S_-(f) = S(f) \cdot \varepsilon(-f) \Rightarrow s_-(t) = \dfrac{1}{2}s(t) + \dfrac{\mathrm{j}}{2}s(t) * \left(-\dfrac{1}{\pi t}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\{s_-(t)\} = -\mathrm{Re}\{s_-(t)\} * \dfrac{1}{\pi t}$

c) $\mathrm{Re}\{S(f)\} = -\mathrm{Re}\{S(-f)\} \Rightarrow s_g(t) \stackrel{!}{=} -s_g(-t) \Rightarrow \mathrm{Re}\{s(t)\} \stackrel{!}{=} -\mathrm{Re}\{s(-t)\} \Rightarrow \mathrm{Re}\{s(t)\} =$ 0.

Der Ansatz $\mathrm{jIm}\{S(f)\} = \mathrm{jIm}\{S(-f)\} \Rightarrow s_u(t) \stackrel{!}{=} s_u(-t)$ führt zu demselben Ergebnis.

Aufgabe 3.23

$$(\mathrm{j}2\pi f)^n S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{(n)}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad s^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}s(t)$$

wegen

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \qquad \text{(aus Schwarz'scher Ungleichung)}$$

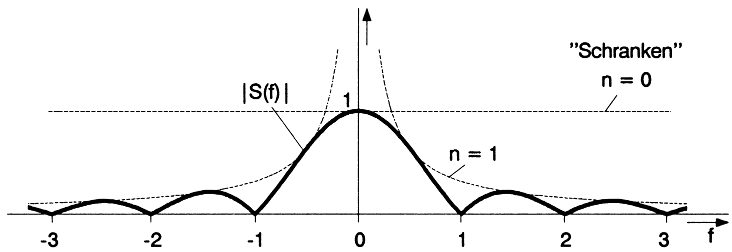
$$\Rightarrow |S(f)| \leq (2\pi f)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} |s^n(t)|\mathrm{d}t \qquad \text{q.e.d.}$$

a) $s(t) = \mathrm{rect}(t)$

$$n = 0: \quad |S(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t)\mathrm{d}t = 1$$

$$n = 1: \quad |S(f)| \leq |(2\pi f)^{-1}| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)\right| \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{|2\pi f|} \cdot 2 = \frac{1}{|\pi f|}$$



b) $s(t) = \Lambda(t)$

$$n = 0: \quad |S(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(t)|\mathrm{d}t = 1$$

$n = 1: \quad |S(f)|$

$$\leq |(2\pi f)^{-1}| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{|\pi f|}$$

$n = 2: \quad |S(f)|$

$$\leq |(2\pi f)^{-2}| \int_{-\infty}^{\infty} |\,\delta\,(t+1) - 2\delta\,(t-1) + \delta\,(t-1)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|\pi f|^2}$$

Aufgabe 3.24

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\Theta}\mathrm{d}\Theta\right]\mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f(t-\Theta)}\mathrm{d}f\right)\mathrm{d}\Theta$$

weiter ist, wieder mit (3.40) und (3.45)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f = \delta(t) \quad \text{und also}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)\delta(t-\Theta)\mathrm{d}\Theta = h(t)$$

Aufgabe 3.25

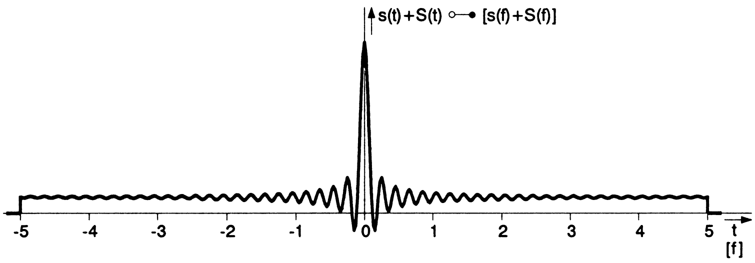
Es sei $s(t) =$ reell und gerade $\Rightarrow S(f) =$ reell und gerade mit $S(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s(-f)$

[Symmetrie-Theorem] folgt dann:

$s(t) + S(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(f) + s(-f) = S(f) + s(f)$

Beispiel : $s(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{10}\right) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(f) = 10\mathrm{si}(\pi 10 f)$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{10}\right) + 10\mathrm{si}(\pi t10) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} 10\mathrm{si}(\pi f10) + \mathrm{rect}\left(\frac{f}{10}\right)$$



Aufgabe 3.26

$$S(0) = S(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \quad \Rightarrow s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\mathrm{d}f$$

Aufgabe 3.27

Es gilt:

$$\left[a_1 s_1\left(\frac{t-t_1}{T}\right)\right] * \left[a_2 s_2\left(\frac{t-t_2}{T}\right)\right] \stackrel{!}{=} a_1 a_2 |T| g\left(\frac{t-t_1-t_2}{T}\right)$$

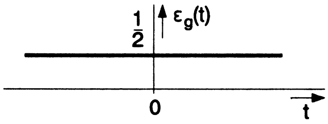
mit $g(t) = s_1(t) * s_2(t)$ nach Aufgabe 3.6

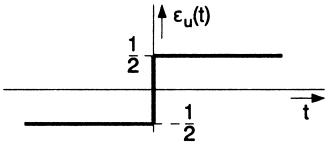
$$\updownarrow L$$

$$\Rightarrow \quad a_1|T|S_1(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_1} \cdot a_2|T|S_2(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_2}$$
$$= a_1 a_2 |T|^2 S_1(Tf) S_2(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(t_1+t_2)}$$
$$= a_1 a_2 |T|^2 G(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(t_1+t_2)} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} a_1 a_2 |T| g\left(\frac{t-(t_1+t_2)}{T}\right)$$

Aufgabe 3.28

$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\mathrm{g}}(t) + \varepsilon_{\mathrm{u}}(t)$





$\varepsilon_{\mathrm{u}}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \mathrm{jIm}\{S_\varepsilon(f)\}$

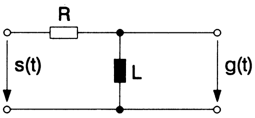
$\Rightarrow \mathrm{sgn}(t) = 2\varepsilon_{\mathrm{u}}(t)$

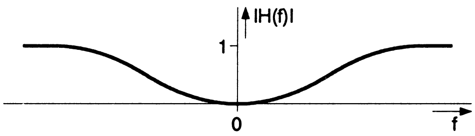
$\Rightarrow \mathrm{sgn}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\mathrm{j}\frac{1}{\pi f}$

Aufgabe 3.29

Komplexe Wechselstromrechnung:

$$H(f) = \frac{G(f)}{S(f)} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}$$





$$\Rightarrow H(f) = \frac{\mathrm{j}2\pi f L}{R + \mathrm{j}2\pi f L}$$

Aufgabe 3.30

Vorausgesetzt werden wieder die Definitionen gemäß (3.48) und (3.49), d.h. ein „gerades" komplexwertiges Signal besitzt eine ungerade Funktion als Imaginärteil, ein „ungerades" komplexwertiges Signal eine gerade Funktion als Imaginärteil.

a) beide Signale „ungerade": $\Rightarrow s_1(t) = s_1(-t)$ imaginärwertig; $s_2(t) = -s_2(-t)$ reellwertig.

b) beide Signale „gerade": $\Rightarrow s_1(t) = s_1(-t)$ reellwertig; $s_2(t) = -s_2(-t)$ imaginärwertig.

c) Die Signale sind komplexwertig, da $S_{1|2}(f) \neq S^*_{1|2}(-f)$. Die Symmetrieeigenschaften des Spektrums bilden sich auf das Signal ab:

$$\begin{array}{ccccccc} S_1(f) & = & S_1(-f) & \qquad & S_2(f) & = & -S_2(-f) \\ \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} \\ s_1(t) & = & s_1(-t) & & s_2(t) & = & -s_2(-t) \end{array}$$

Bezüglich der analytischen Komponenten gilt

$$\begin{array}{ccc} S_1(f)\cdot\varepsilon(f) & = & S_2(f)\cdot\varepsilon(f) \\ \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} \\ s_{1,+}(t) & = & s_{2,+}(t) \end{array}$$

und weiter wegen der bekannten Symmetrieeigenschaften der Spektren

$$\begin{array}{ccc} S_1(f)\cdot\varepsilon(-f) & = & -S_2(f)\cdot\varepsilon(-f) \\ \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} \\ s_{1,-}(t) & = & -s_{2,-}(t) \end{array}$$

Aus den Symmetrieeigenschaften des Spektrums $S_1(f)$ folgt ebenfalls

$$\begin{array}{ccc} S_1(f)\cdot\varepsilon(f) & = & S_1(-f)\cdot\varepsilon(f) \\ \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} \\ s_{1,+}(t) & = & s_{1,-}(-t) \end{array}$$

Aufgabe 3.31

Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt z.B. aus der linken Bedingung (die rechte Bedingung ist nur eine Umformung hiervon)

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Re}\{S(f)\} & = & \mathrm{jIm}\{S(f)\} & * & \left(-\dfrac{1}{\mathrm{j}\pi f}\right) \\ \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} & & \updownarrow L^{-1} \\ s_g(t) & = & s_u(t) & \cdot & -\mathrm{sgn}(t) \end{array}$$

Dies kann nur für Signale mit $s(t) = 0$ für alle $t > 0$ erfüllt sein, also antikausale Signale.

Aufgabe 3.32

$$s_+(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{\mathrm{j}}{2}s(t) * \frac{1}{\pi t} \qquad (3.107)$$

a) $s(t) = \mathrm{rect}(t)$

$$s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\cdot\frac{1}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\text{falls } |t| > \frac{1}{2}: \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{-1}{\pi}\ln|t-\tau|\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\pi}\left\{\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| - \ln\left|t+\frac{1}{2}\right|\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}\right|$$

$$\text{falls } -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}: \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{t-\varepsilon}\frac{1}{t-\tau}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi}\int_{t+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t-\tau}\mathrm{d}\tau\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{-1}{\pi}\ln|t-\tau|\Big|_{-\frac{1}{2}}^{t-\varepsilon} - \frac{1}{\pi}\ln|t-\tau|\Big|_{t+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{-1}{\pi}\left(\ln|\varepsilon| - \ln\left|t+\frac{1}{2}\right| + \ln\left|t-\frac{1}{2}\right| - \ln|\varepsilon|\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}\right|$$

$$\Rightarrow s_+(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{rect}(t) + \tfrac{\mathrm{j}}{2}\tfrac{1}{\pi}\ln\left|\tfrac{t+\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}\right|$$

b) $s(t) = \mathrm{si}\,(\pi t)$

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{si}\,(\pi t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = \mathrm{rect}(f)\cdot(-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(f))$$

$$S_+(f) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(f) + \frac{1}{2}\mathrm{rect}(f)\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(f)\cdot\mathrm{sgn}(f)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f + \int_{0}^{\frac{1}{2}}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{j}2\pi t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{j}2\pi t} + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t} + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t} - \frac{1}{\mathrm{j}2\pi t}$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{j}\pi t} + \frac{1}{\mathrm{j}\pi t}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t}}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{j}\pi t} + \frac{1}{\mathrm{j}\pi t}\cos(\pi t) = \frac{1}{\mathrm{j}\pi t}\big(\cos\pi t - 1\big)$$

$$\Rightarrow s_+(t) = \frac{1}{2}\mathrm{si}(\pi t) + \frac{1}{2\mathrm{j}\pi t}\left[\cos(\pi t) - 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{si}(\pi t) - \frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\cos(\pi t)-1}{\pi t}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{si}(\pi t) + \frac{\mathrm{j}}{2}\frac{1-\cos(\pi t)}{\pi t}$$

Zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1

$s_{\mathrm{a}}(t) = s(t) \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{mit} \quad m(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Rightarrow$

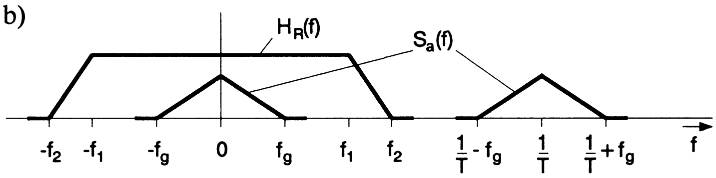
a) $s_1(t) + s_2(t)] \cdot m(t) = s_1(t) \cdot m(t) + s_2(t) \cdot m(t) \Rightarrow$ **linear**

b) $s(t - t_0) \cdot m(t) \neq s(t - t_0) \cdot m(t - t_0) \Rightarrow$ **nicht zeitinvariant**

Aufgabe 4.2

a) $f_{\mathrm{g}} = 4\,\mathrm{kHz} \Rightarrow$ Nyquist-Rate $\dfrac{1}{T} = 2f_{\mathrm{g}} = 8\,\mathrm{kHz}$

b)



1. $f_1 \geq f_{\mathrm{g}}$ sonst Verzerrungen durch Flankenabfall
   $\Rightarrow f_{1\mathrm{min}} = f_{\mathrm{g}}$

2. $\dfrac{1}{T} - f_{\mathrm{g}} \geq f_2$ sonst Überlappung der wiederholten Spektren innerhalb des Tiefpasses.
   $\Rightarrow \dfrac{1}{T_{\mathrm{min}}} \geq f_2 + f_{\mathrm{g}}$

Aufgabe 4.3

Modell 1: lineare Torschaltung („natürliche"Abtastung)

$$
\begin{aligned}
s_{\mathrm{a}}(t) &= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t - nT}{t_0}\right) \\
&= s(t) \cdot \left[\operatorname{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]
\end{aligned}
$$

$$
S_{\mathrm{a}}(f) = S(f) * \left[t_0 \cdot \operatorname{si}(\pi f t_0) \cdot \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right].
$$

Das Spektrum wird mit einer Dirac-Impulsfolge gefaltet, die mit einer si-Funktion gewichtet ist.

Fehlerfreie Rückgewinnung mit Tiefpass ist möglich.

Modell 2: Abtast-Halteschaltung („sample and hold“-Abtastung)

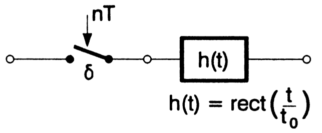
$$s_{\mathrm{a}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{t_0}\right)$$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) * \left[s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] ,$$

$$S_{\mathrm{a}}(f) = t_0 \mathrm{si}(\pi f t_0) \cdot \left[S(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|T|} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right] .$$

Das durch die Faltung mit einer Dirac-Impulsfolge periodisch wiederholte Spektrum wird mit einer si-Funktion multipliziert! Daraus resultieren lineare Verzerrungen. Fehlerfreie Rückgewinnung mit Tiefpass und Entzerrerfilter möglich.

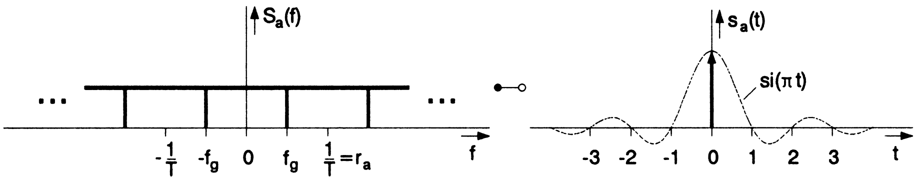
Ersatzschaltung:



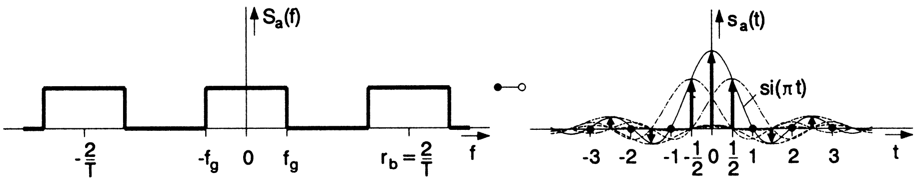
Aufgabe 4.4

$s(t) = \mathrm{si}(\pi t) \Rightarrow S(f) = \mathrm{rect}(f)$

a) $r_{\mathrm{a}} = \dfrac{1}{T} = 2f_{\mathrm{g}}$



b) $r_{\mathrm{b}} = \dfrac{2}{T} = 4f_{\mathrm{g}}$

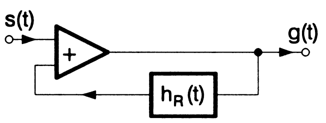


Aufgabe 4.5

a) $s_{\mathrm{Tre}}(t) = \left[s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$

$$S_{\mathrm{Tre}}(f) = \left\{S(f) * \left[\frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right]\right\} \cdot |T| \mathrm{si}(\pi f T) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T/2}$$

b) $H(f) = \dfrac{1}{\mathrm{si}(\pi f T)} \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{f_{\mathrm{g}}}\right) \qquad \text{mit} \qquad T = \dfrac{1}{2f_{\mathrm{g}}}$

c) 

$\Rightarrow g(t) = s(t) + [g(t) * h_{\mathrm{R}}(t)]$

$$\Rightarrow g(t) * [\delta(t) - h_\mathrm{R}(t)] = s(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$$

$$G(f) \cdot [1 - H_\mathrm{R}(f)] = S(f)$$

$$H_1(f) = \frac{G(f)}{S(f)} = \frac{1}{1 - H_\mathrm{R}(f)} \overset{!}{=} \frac{1}{\mathrm{si}(\pi f T)} \quad \text{für} \quad |f| \leq f_\mathrm{g}$$

$$\Rightarrow H_\mathrm{R}(f) = 1 - \mathrm{si}(\pi f T) \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{2 f_\mathrm{g}}$$

Realisierung mit Kurzzeitintegrator

Aufgabe 4.6

a)

$$\mathrm{rep}_\mathrm{T} s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= s(t) * \left[\frac{1}{|T|} \perp\!\!\perp\!\!\perp \left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$\mathrm{comb}_\mathrm{T} s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t - nT) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= s(t) \cdot \frac{1}{|T|} \perp\!\!\perp\!\!\perp \left(\frac{t}{T}\right)$$

b)

$$\mathrm{rep}_\mathrm{T} s(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet S(f) \cdot \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = S(f) \perp\!\!\perp\!\!\perp (Tf)$$

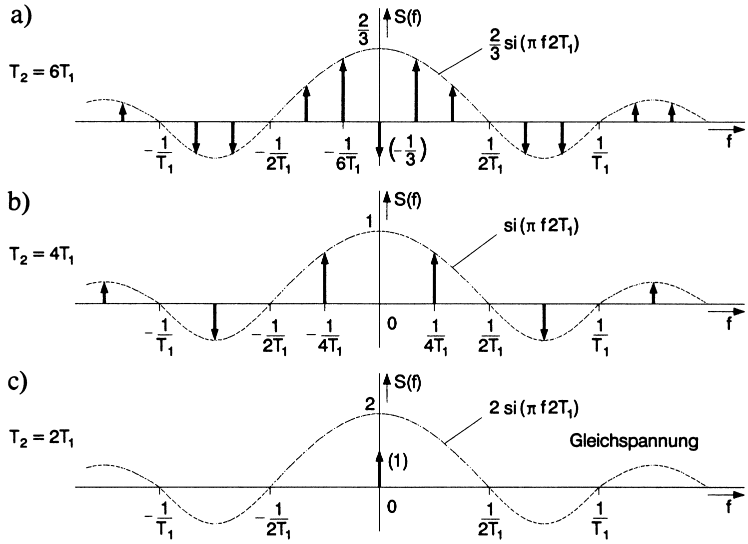
$$\mathrm{comb}_\mathrm{T} s(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet S(f) * \left[\frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right] = S(f) * \perp\!\!\perp\!\!\perp (Tf)$$

Aufgabe 4.7

$$s(t) = \left[2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T_1}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_2)\right] - 1$$

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$$

$$S(f) = 4|T_1|\mathrm{si}(\pi f 2T_1) \cdot \frac{1}{|T_2|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_2}\right) - \delta(f)$$

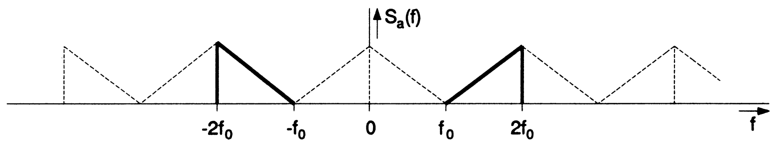


Aufgabe 4.8

$$s_{\mathrm{a}}(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_0}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_{\mathrm{a}}(f)$$

$$= S(f) * \left[2f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_0)\right]$$

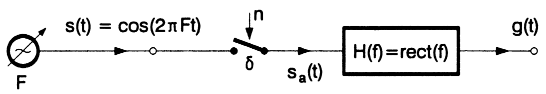
$S(f) \neq 0 \quad$ für $\quad f_0 < |f| < 2f_0$



Rückgewinnung mit Bandpaß:

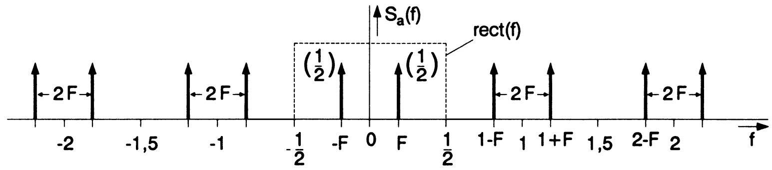
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_0}\right) * [\delta(f + 1{,}5f_0) + \delta(f - 1{,}5f_0)]$$

Aufgabe 4.9

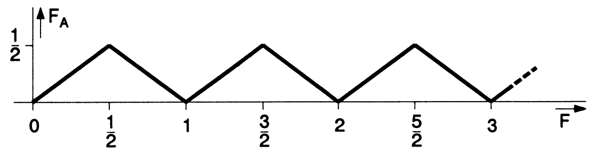


$$g(t) = \left[\cos(2\pi Ft) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)\right] * h(t)$$

$$G(f) = \left\{\left[\frac{1}{2}\delta(f+F) + \frac{1}{2}\delta(f-F)\right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)\right\} \cdot \mathrm{rect}(f)$$



$$g(t) = \left\{\begin{array}{ll} \cos(2\pi Ft) & 0 < F < \frac{1}{2} \\ \cos[2\pi(1-F)t] & \frac{1}{2} < F < 1{,}5 \\ \cos[2\pi(2-F)t] & 1{,}5 < F < 2{,}5 \end{array}\right\} = \cos(2\pi F_{\mathrm{A}} t)$$

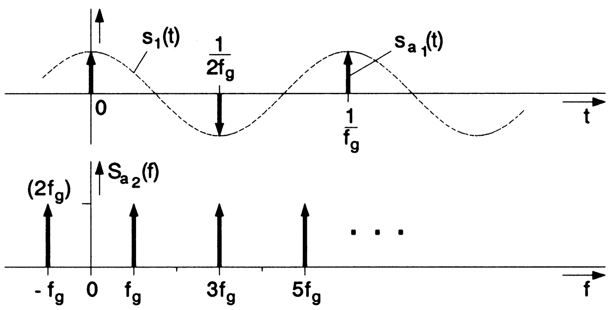


Aufgabe 4.10

a) $s_1(t) = \cos(2\pi f_\mathrm{g} t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_1(f) = \frac{1}{2}\delta(f + f_\mathrm{g}) + \frac{1}{2}\delta(f - f_\mathrm{g})$

$$s_{\mathrm{a}_1}(t) = s_1(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_\mathrm{g}}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_{\mathrm{a}_1}(f)$$

$$= S_1(f) * \left[2f_\mathrm{g} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_\mathrm{g})\right]$$



Rekonstruktion ergibt cos-Signal doppelter Amplitude

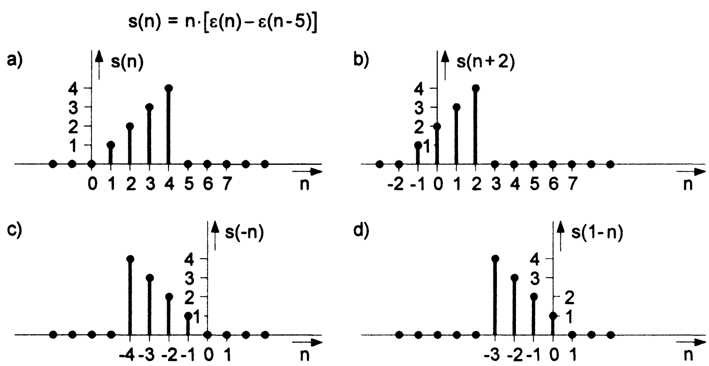
b) $s_2(t) = \sin(2\pi f_\mathrm{g} t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_2(f) = \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f + f_\mathrm{g}) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f - f_\mathrm{g})$

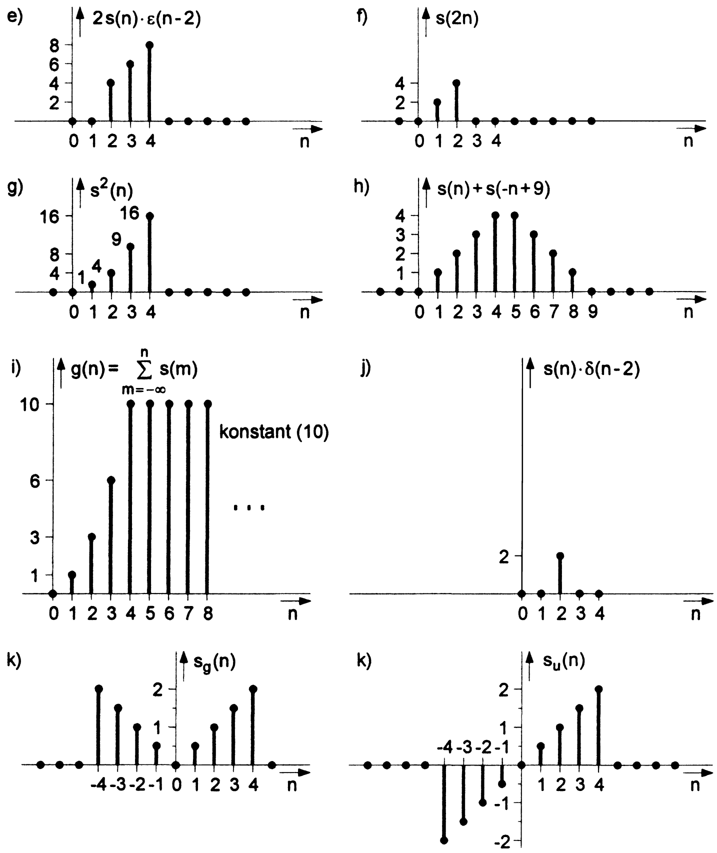
$$s_{\mathrm{a}_2}(t) = s_2(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_\mathrm{g}}\right) = 0 \circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S_{\mathrm{a}_2}(f) = S_2(f) * \left[2f_\mathrm{g} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_\mathrm{g})\right] = 0$$

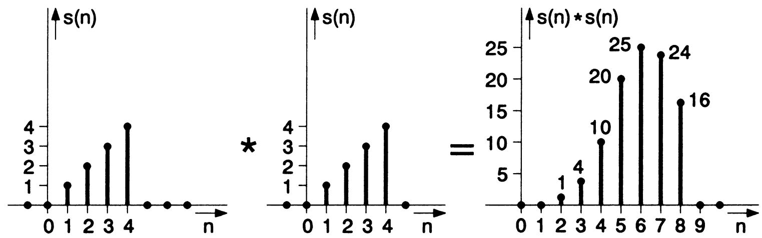
Abtastwerte und Rekonstruktion verschwinden hier.

Aufgabe 4.11

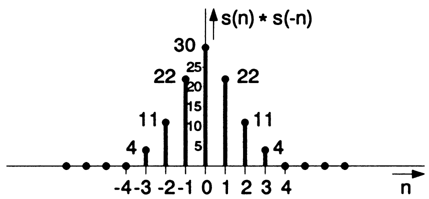




Aufgabe 4.12



Aufgabe 4.13



Aufgabe 4.14

Es gilt: $|s(n)| \leq A$

$$\Rightarrow |g(n)| = |s(n) * h(n)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \cdot |s(n-m)|$$

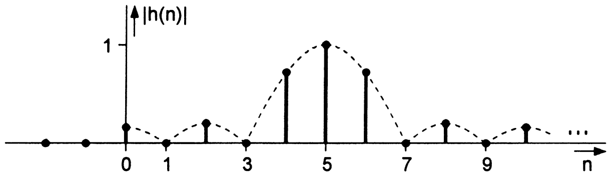
$$\leq A \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \overset{!}{<} \infty$$

a) $h(n) = \varepsilon(n) \cdot \cos(\pi n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon(n) = \infty \Rightarrow \text{nicht stabil!}$$

b) $h(n) = \varepsilon(n) \cdot a^n$ stabil für $|a| < 1$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon(n) \cdot \mathrm{si}\left[\frac{\pi}{2}(n-5)\right] \right|$



$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots\right)$$

divergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ divergent $\Rightarrow$ nicht stabil!

Aufgabe 4.15

$$s(n) \to g(n) = \frac{1}{3}[s(n) + s(n-1) + s(n-2)]$$

a) $\sum a_i s_i(n) \to \frac{1}{3}\left[\sum a_i s_i(n) + \sum a_i s_i(n-1) + \sum a_i s_i(n-2)\right]$

$= \sum a_i g_i(n) \Rightarrow$ linear

$s(n-m) \to \frac{1}{3}[s(n-m) + s(n-m-1) + s(n-m-2)]$

$= g(n-m) \Rightarrow$ verschiebungsinvariant

b) $h(n) = \frac{1}{3}\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{1}{3}\delta(n-2)$

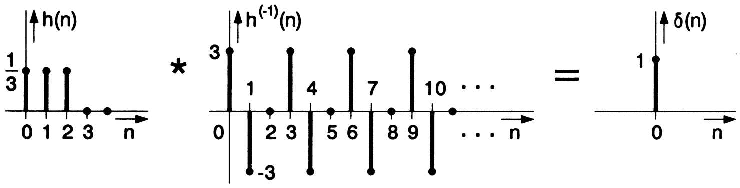
c) $h(n) = 0 \qquad \forall n < 0 \Rightarrow$ kausal

$\sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| = 1 \Rightarrow$ amplitudenstabil

d) $0, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \ldots$

e) $h(n) * h^{(-1)}(n) \overset{!}{=} \delta(n)$

mit „Papierstreifenmethode“



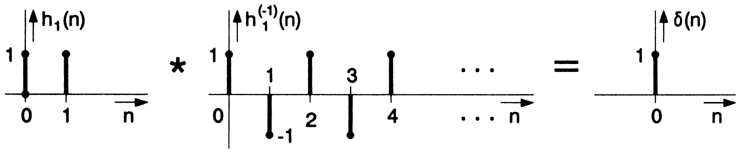
$$h^{(-1)}(n) = 3\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-3m) - 3\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-1-3m)$$

f) $s(n) * h(n) = \dfrac{1}{3}[s(n) + s(n-1) + s(n-2)] = g(n)$

$g(n) * h^{(-1)}(n) = s(n) * h(n) * h^{(-1)}(n) = s(n) * \delta(n) = s(n)$ q.e.d.

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |h^{(-1)}(n)| = \infty \Rightarrow$ nicht amplitudenstabil

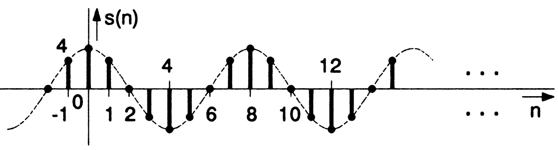
h) mit „Papierstreifenmethode“



$$h_1^{(-1)}(n) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\delta(n-m)$$

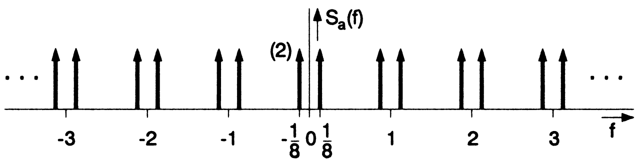
Aufgabe 4.16

a)

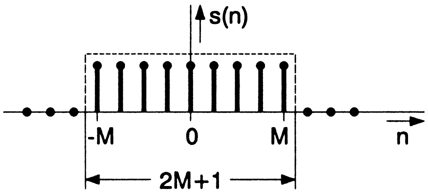


$$s(n) = 4\cos(\pi n/4) \rightarrow s_{\mathrm{a}}(t) = 4\cos\left(2\pi\frac{t}{8}\right)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$$

$$S_{\mathrm{a}}(f) = \left[2\delta\left(f+\frac{1}{8}\right) + 2\delta\left(f-\frac{1}{8}\right)\right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n)$$



b) $s(n) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad |n| \leq M \\ 0, & \text{für} \quad |n| > M \end{cases}$



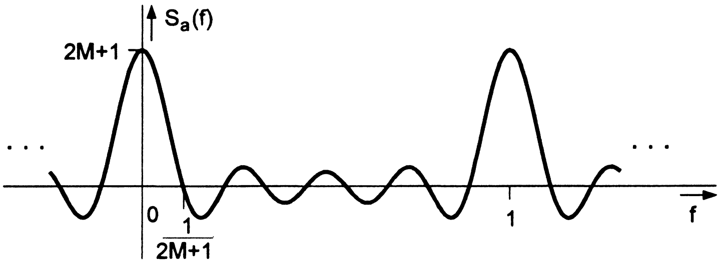
$\downarrow$

$$s_\mathrm{a}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2M+1}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S_\mathrm{a}(f) = (2M+1)\mathrm{si}[\pi(2M+1)f] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n) = \frac{\sin[\pi f(2M+1)]}{\sin(\pi f)}$$

(oder s. Aufgabe 3.14)



c) $s(n) = a^{|n|}$

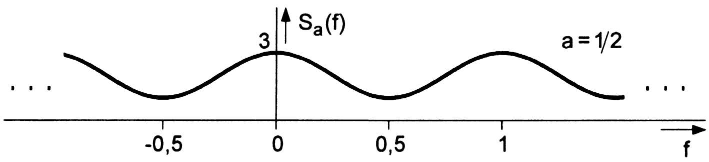
$$S_\mathrm{a}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn} - a^0 \cdot \mathrm{e}^0$$

mit $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| = |a\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}2\pi f}| < 1$

$$S_\mathrm{a}(f) = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}} + \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}} - 1$$

$$S_\mathrm{a}(f) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)} \quad \text{mit } |a| < 1$$



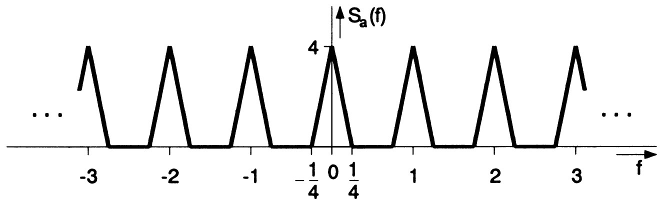
d) $s(n) = \mathrm{si}^2(\pi n/4)$

$$\downarrow$$

$$s_\mathrm{a}(t) = \mathrm{si}^2(\pi t/4) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S_\mathrm{a}(f) = [4\Lambda(4f)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$$



Aufgabe 4.17

$$s(n) = \delta(n-m) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{-\infty}^{\infty} s(n) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n-m) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mf}$$

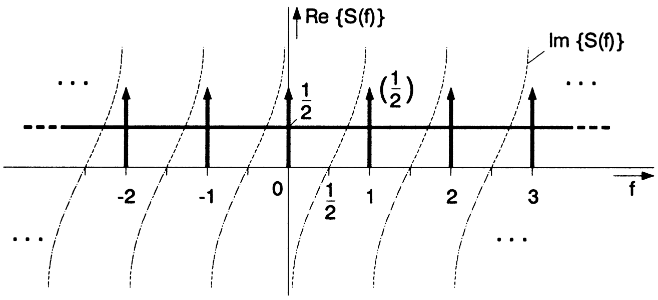
damit: $s(n-m) = s(n) * \delta(n-m) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S_\mathrm{a}(f) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mf}$

Aufgabe 4.18

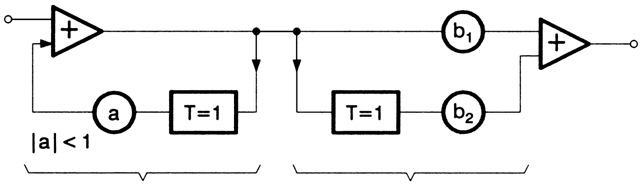
mit $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} s(m) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{S_\mathrm{a}(f)}{1-\exp(-\mathrm{j}2\pi f)} + \frac{1}{2} S_\mathrm{a}(0) \perp\!\!\perp\!\!\perp(f)$ folgt:

$$\varepsilon(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-\exp(-\mathrm{j}2\pi f)} + \frac{1}{2} \perp\!\!\perp\!\!\perp(f)$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \perp\!\!\perp\!\!\perp(f) - \mathrm{j}\cot(\pi f)]$$



Aufgabe 4.19



$h(n) = [\varepsilon(n) \cdot a^n] * [b_1\delta(n) + b_2\delta(n-1)]$

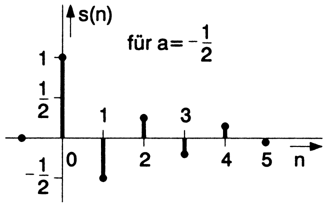
$\circ\!\!-\!\!\bullet$ mit $b_1 = b_2$ folgt

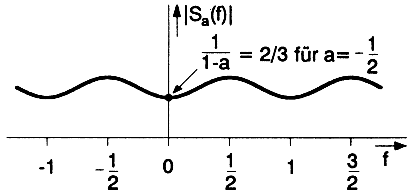
$H_\mathrm{a}(f) = [1/(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f} \cdot a)] \cdot b_1(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f})$

Aufgabe 4.20

$$s(n) = \varepsilon(n) \cdot a^n \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_\mathrm{a}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(n) \cdot a^n \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [a \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}]^n = \frac{1}{1 - a \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}} \text{ für } |a| < 1$$





Aufgabe 4.21

$$S_\mathrm{d}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s_\mathrm{d}(n) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/M} \qquad k = 0, \ldots, M-1$$

a) $$S_\mathrm{d}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} \delta(n) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/M} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \cdot 0/M} = 1$$

b) $$S_\mathrm{d}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} [\delta(n) - a \cdot \delta(n-m)] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \cdot n/M}$$

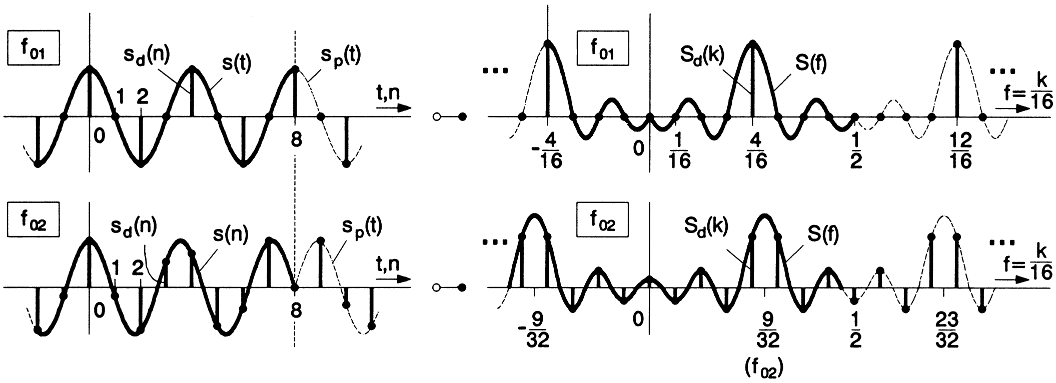
$$= 1 - a \sum_{n=0}^{M-1} \delta(n-m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/M} = 1 - a \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \cdot m/M}$$

Aufgabe 4.22

$s(t) = \mathrm{rect}(t/16) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ mit $f_{01} = 8/32$ und $f_{02} = 9/32$

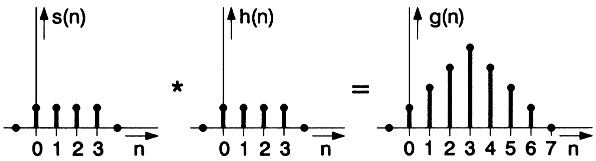
a) $$S(f) = 16 \cdot \mathrm{si}(\pi f 16) * \left[\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\right]$$

b, c)

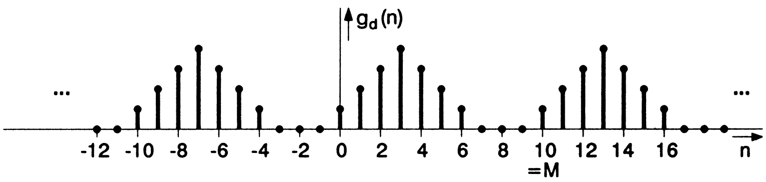


Aufgabe 4.23

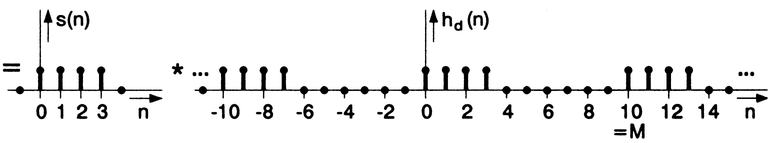
$s(n) * h(n) = g(n)$



$$g(n) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - Mm) = g_{\mathrm{d}}(n) \quad \text{mit} \quad M = 10 \text{ gilt:}$$

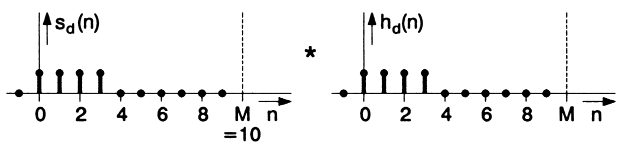


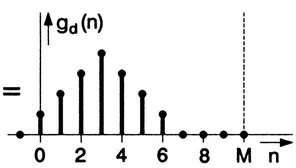
$$g_{\mathrm{d}}(n) = s(n) * \left[h(n) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - Mm) \right]$$



Periodische Faltung:

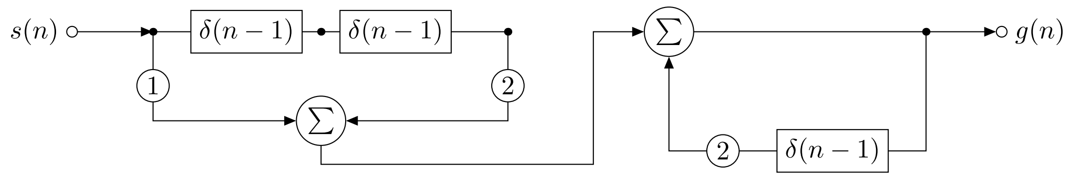
$$g_{\mathrm{d}}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} s_{\mathrm{d}}(m) h_{\mathrm{d}}(n - m) \quad \text{für} \quad n = 0, \ldots, M - 1$$





Aufgabe 4.24

a) $g(n) = \underbrace{s(n) + 2s(n-2)}_{\text{FIR-Teil}} + \underbrace{2g(n-1)}_{\text{IIR-Teil}}$



b) FIR-Teil: $h_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2)$

IIR-Teil: $h_2(n) = 2^n \varepsilon(n)$

$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = 2^n \left[\varepsilon(n) + \frac{1}{2}\varepsilon(n-2)\right]$

$\Rightarrow$ nicht amplitudenstabil

c) $G(z) - 2G(z) \cdot z^{-1} = S(z) + 2S(z)z^{-2}$

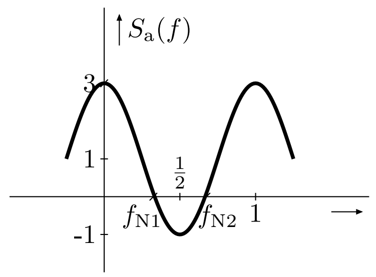
$H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{z^2+2}{z(z-2)}$, $|z| > 2$ (rechtsseitige Folge)

d) Lineare, zeitdiskrete kausale Systeme sind stabil, wenn alle Pole innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegen.

hier: nicht stabil, da $z_{\mathrm{P}_2} = 2$!

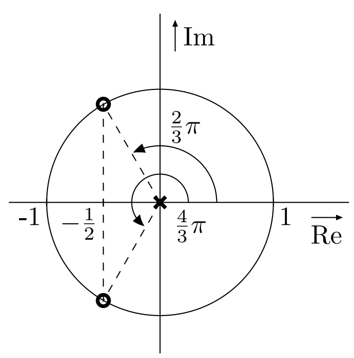
Aufgabe 4.25

a) $S_\mathrm{a}(f) = 1 + 2\cos(2\pi f)$ Nullstellen: $f_{\mathrm{N}_1} = \frac{1}{3}, f_{\mathrm{N}_2} = \frac{2}{3}$



b) $S(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)]\, z^{-n} = 1 + z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+z+1}{z}$

Polstelle: $z_\mathrm{p} = 0$ Nullstellen: $z_{\mathrm{N}1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3}$



Konvergenzbereich: ganze Ebene außer $z = 0$

c) $S(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f} + 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f} = 1 + 2\cos(2\pi f) = S_\mathrm{a}(f)$

Aufgabe 4.26

a) $S(z) = \dfrac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \underbrace{\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}}_{S_1(z)} + \underbrace{\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}}_{S_2(z)}$

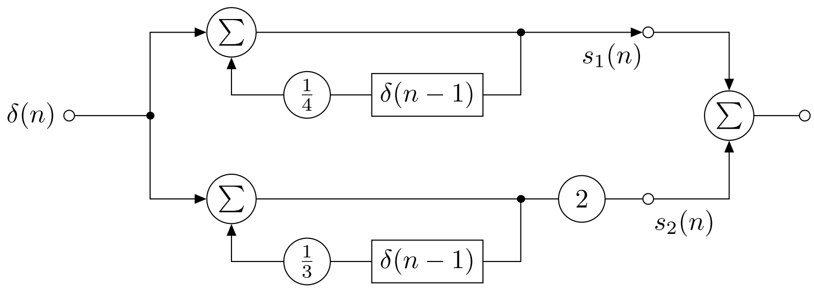
Pole: $z_{\mathrm{P}_1} = \frac{1}{4}, z_{\mathrm{P}_2} = \frac{1}{3}$

$s(n) = s_1(n) + s_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(n)\,,\ |z| > \frac{1}{3}$

b) $S_1(z)\,,\ |z| > \frac{1}{4} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad s_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n)$ (rechtsseitig)
$S_2(z)\,,\ |z| < \frac{1}{3} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad s_2(n) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1)$ (linksseitig)
$\Rightarrow s(n) = \frac{1}{4}^n \varepsilon(n) - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1)$ (zweiseitige Folge)

c) $S_1(z)\,,\ |z| < \frac{1}{4} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad s_1(n) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(-n-1)$ (linksseitig)
$S_2(z)\,,\ |z| < \frac{1}{3} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad s_2(n) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1)$ (linksseitig)
$s(n) = s_1(n) + s_2(n)$

d) $|z| > \frac{1}{3} \Rightarrow s(n) = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n)}_{s_1(n)} + \underbrace{2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(n)}_{s_2(n)}$



IIR-Filter (s. Abb. 4.14)

Aufgabe 4.27

a) $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$

b) $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

c) $H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)\cdot H_2(z)}$

Aufgabe 4.28

a) $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{z(z-1)}{(z^2-z-1)}$

b) Nullstellen: $z_{\mathrm{N}_1} = 0, z_{\mathrm{N}_2} = 1$ Polstellen: $z_{\mathrm{P}_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$\Rightarrow$ Konvergenzbereich (da kausal): $|z| > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

c) $H(z) = \dfrac{a_1}{1 - z_{\mathrm{P}_1} z^{-1}} + \dfrac{a_2}{1 - z_{\mathrm{P}_2} z^{-1}}$ mit $a_1 = \dfrac{z_{\mathrm{P}_1} - 1}{z_{\mathrm{P}_1} - z_{\mathrm{P}_2}}$, $a_2 = \dfrac{1 - z_{\mathrm{P}_2}}{z_{\mathrm{P}_1} - z_{\mathrm{P}_2}}$

$\Rightarrow h(n) = a_1(z_{\mathrm{P}_1})^n \varepsilon(n) + a_2(z_{\mathrm{P}_2})^n \varepsilon(n) \quad |z| > z_{\mathrm{P}_1}$

Aufgabe 4.29

a) $h_1(z) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad H_1(z) = z^0 + z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2+z+1}{z^2}$
Pole: $z_{\mathrm{P}_{1,2}} = 0\,,$ Nullstellen: $z_{\mathrm{N}_{1,2}} = -\frac{1}{2}\left(1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\right)$

b) Konvergenzbereich: $|z| > 0$ gesamte z-Ebene

c) $h_3(n) \overset{!}{=} h_1(n) * h_2(n) \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad H_3(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \Rightarrow H_2(z) = \frac{H_3(z)}{H_1(z)}$
$\Rightarrow H_2(z) = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad h_2(n) = \delta(n-3) + \delta(n-2) + \delta(n-1)$

Aufgabe 4.30

a) $g(n) = s(n) - s(n-1)$

$$\updownarrow Z$$

$$G(z) = S(z) - z^{-1} S(z)$$

$$H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = 1 - z^{-1}$$

$$H(f) = H\left(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}$$

b) $$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) = s(n) * \underbrace{\varepsilon(n)}_{h(n)}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$H(f) = H\left(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}\right) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}}$$

Aufgabe 4.31

a) $s(n) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F n} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad S\left(z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F}\right)$

z-Transformation:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[s(n) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F n}\right] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \cdot \Bigg[\underbrace{z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F}}_{z'}\Bigg]^{-n} = S(z') = S\left(z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F}\right)$$

b)
$$
\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{s(n)\} z^{-n} + \mathrm{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{s(n)\} z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{s(n)\}\mathrm{Re}\left\{z^{-n}\right\} + \mathrm{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{s(n)\}\mathrm{Im}\left\{z^{-n}\right\} \\
&\quad + \mathrm{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{s(n)\}\mathrm{Re}\left\{z^{-n}\right\} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{s(n)\}\mathrm{Im}\left\{z^{-n}\right\} \\
&= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{Re}\{s(n)\}\mathrm{Re}\left\{z^{-n}\right\} - \mathrm{Im}\{s(n)\}\mathrm{Im}\left\{z^{-n}\right\}\right]}_{\mathrm{Re}\{S(z)\}} \\
&\quad + \mathrm{j} \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{Im}\{s(n)\}\mathrm{Re}\left\{z^{-n}\right\} + \mathrm{Re}\{s(n)\}\mathrm{Im}\left\{z^{-n}\right\}\right]}_{\mathrm{Im}\{S(z)\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^*(n) z^{-n} = &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{Re}\{s(n)\}\mathrm{Re}\left\{z^{-n}\right\} + \mathrm{Im}\{s(n)\}\mathrm{Im}\left\{z^{-n}\right\}\right] \\
&+ \mathrm{j} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\mathrm{Im}\{s(n)\}\mathrm{Re}\left\{z^{-n}\right\} + \mathrm{Re}\{s(n)\}\mathrm{Im}\left\{z^{-n}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

mit $(z^*)^{-n} = \mathrm{Re}\{z^{-n}\} - \mathrm{j}\mathrm{Im}\{z^{-n}\}$

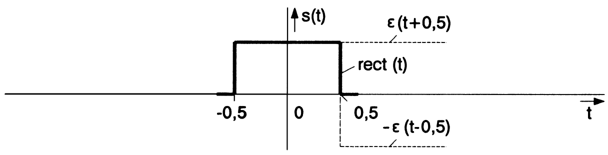
und $S^*(z) = \mathrm{Re}\{S(z)\} - \mathrm{j}\mathrm{Im}\{S(z)\}$: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} S^*(n) z^{-n} = S^*\left(z^*\right)$.

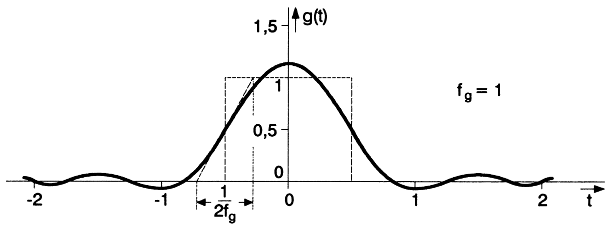
c)
$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \left(z^{-1}\right)^{-n} = S\left(z^{-1}\right)
$$

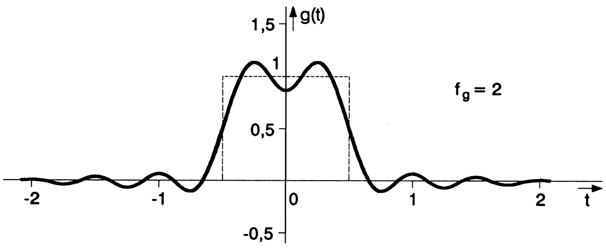
Zu Kapitel 5

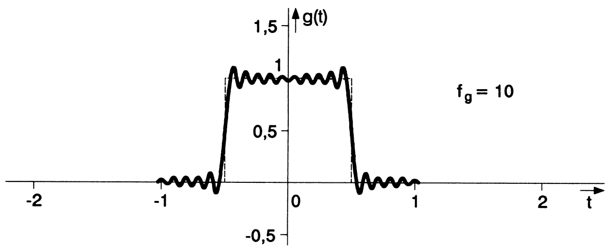
Aufgabe 5.1

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \mathrm{rect}(t) \\
&= \varepsilon\left(t+\frac{1}{2}\right) - \varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow g(t) &= h_\varepsilon\left(t+\frac{1}{2}\right) - h_\varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{si}\left[\pi 2 f_\mathrm{g}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] - \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{si}\left[\pi 2 f_\mathrm{g}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{si}\left[\pi 2 f_\mathrm{g}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{\pi}\mathrm{si}\left[\pi 2 f_\mathrm{g}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

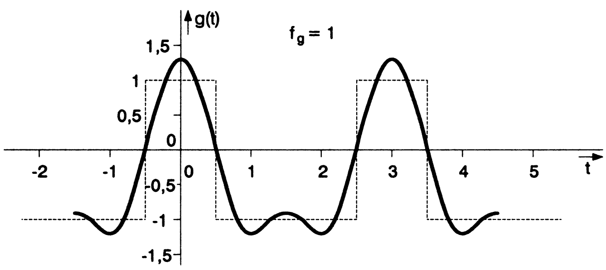


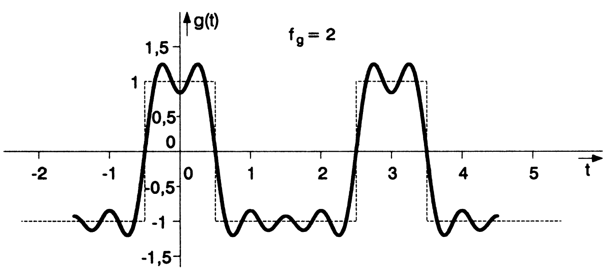


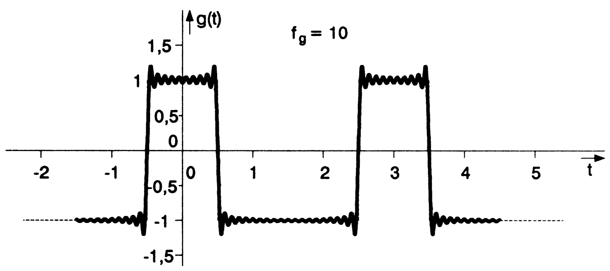




Aufgabe 5.2







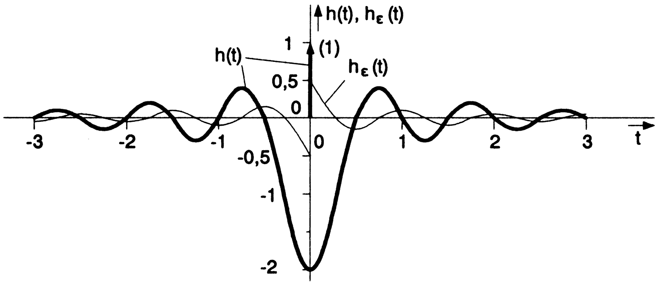
Aufgabe 5.3

$$H_{\mathrm{HP}}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{\mathrm{g}}}\right) = 1 - H_{\mathrm{TP}}(t)$$

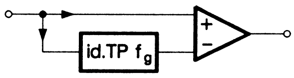
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$h(t) = \delta(t) - 2f_{\mathrm{g}}\mathrm{si}(\pi 2 f_{\mathrm{g}} t) = \delta(t) - h_{\mathrm{TP}}(t)$$

$$h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{si}(\pi 2 f_{\mathrm{g}} t) = \varepsilon(t) - h_{\varepsilon\mathrm{TP}}(t)$$



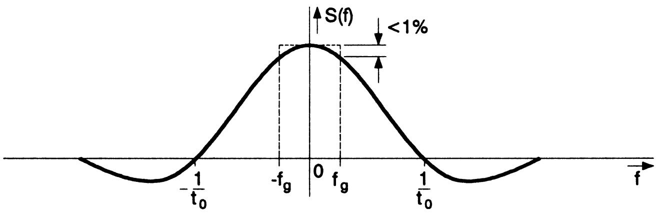
Blockschaltbild eines idealen Hochpasses:



Aufgabe 5.4

Bestimmung von t_0 für das Rechtecksignal:

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S(f) = t_0 \mathrm{si}(\pi f t_0)$$



$$\left|\frac{S(f_{\mathrm{g}}) - S(0)}{S(0)}\right| < 0{,}01 \Rightarrow 1 - \mathrm{si}(\pi f_{\mathrm{g}} t_0) < 0{,}01 \tag{5.1}$$

Mit $\mathrm{si}(x) = \dfrac{\sin x}{x} \approx \dfrac{1}{x}\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ für $x \ll 1$ ergibt sich:

$$\frac{\pi^2 f_{\mathrm{g}}^2 t_0^2}{6} < 0{,}01 \Rightarrow t_0 < 19{,}49\,\mu\mathrm{s}$$

Für den Dreieckimpuls $s(t) = \Lambda\left(\dfrac{t}{t_0/2}\right)$ ergibt sich:

$$s(t) = \Lambda\left(\frac{t}{t_0/2}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S(f) = \frac{t_0}{2}\mathrm{si}^2(\pi f_{\mathrm{g}} t_0/2)$$

aus (5.1) $\Rightarrow 1 - \mathrm{si}^2(\pi f_{\mathrm{g}} t_0/2) < 0{,}01$ bzw. $\mathrm{si}^2(\pi f_{\mathrm{g}} t_0/2) > 0{,}99$

$$\frac{\pi^2 f_{\mathrm{g}}^2 t_0^2}{4 \cdot 6} < 1 - \sqrt{0{,}99} \Rightarrow t_0 < 27{,}6\,\mu\mathrm{s}$$

Aufgabe 5.5

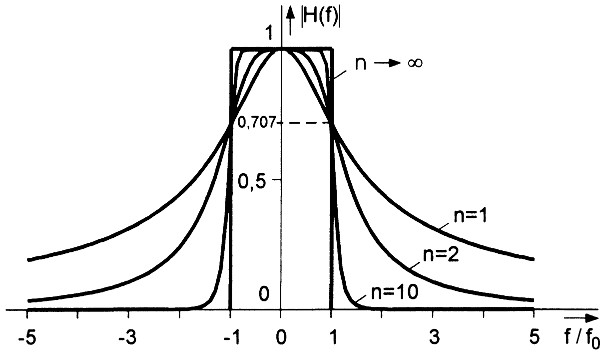
a) $|H(f)| = 1/\sqrt{1+(f/f_0)^{2n}} \Rightarrow |H(f_0)| = 1/\sqrt{2}$

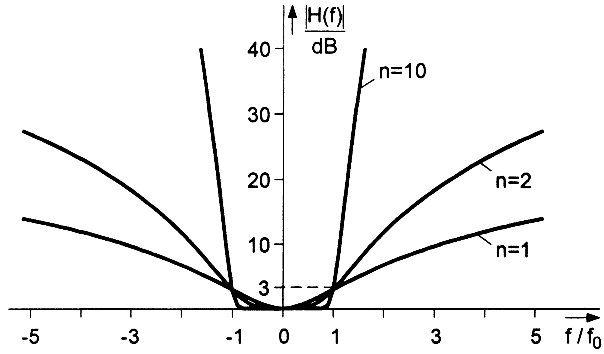
Dämpfungsmaß: $a(f_0) = -20\lg|H(f_0)| = 3\,\mathrm{dB}$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n} = \begin{cases} 0 & |f| < f_0 \\ 1 & |f| = f_0 \\ \infty & |f| > f_0 \end{cases}$$

somit

$$|H(f)| = \left\{\begin{matrix} 1 & |f| < f_0 \\ 1/\sqrt{2} & |f| = f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{matrix}\right\} = \ \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \text{ bis auf Nullfunktionen bei } \pm f_0$$





c) mit $T = RC$ in (1.21 a)

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}$$

$$\Rightarrow n = 1\,, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

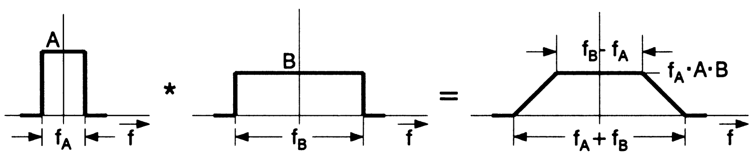
d) $a(f) = -20\lg|H(f)|\,\mathrm{dB} \Rightarrow |H(f)| = 10^{-a(f)/20\,\mathrm{dB}}$

$\Rightarrow |H(0{,}8f_0)| = [1+(0{,}8)^{2n}]^{-1/2} > 0{,}891$

$n > 3{,}028 \Rightarrow n = 4$

Aufgabe 5.6

Für $f_A \le f_B$ (s. Aufgabe 1.6)



Mit der Skizze ergibt sich:
$f_2 = \frac{1}{2}(f_A + f_B) \quad f_1 = \frac{1}{2}(f_B - f_A)$

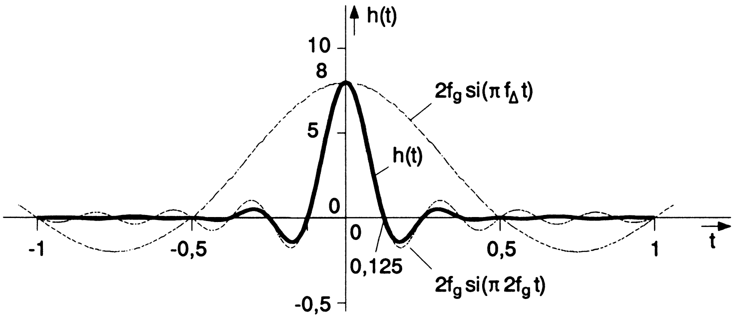
$\Rightarrow f_B = f_1 + f_2$ und $f_A = f_2 - f_1$

$A \cdot B \cdot f_A = 1 \Rightarrow AB = 1/f_A = 1/(f_2 - f_1)$

$$\Rightarrow H(f) = \left[\frac{1}{f_2 - f_1}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_2 - f_1}\right)\right] * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_1 + f_2}\right)$$

Mit $f_\Delta = f_2 - f_1$ und $f_\mathrm{g} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ergibt sich:

$$H(f) = \left[\frac{1}{f_\Delta}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right)\right] * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; h(t) = \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \cdot 2f_\mathrm{g}\mathrm{si}(\pi 2 f_\mathrm{g} t)$$



Aufgabe 5.7

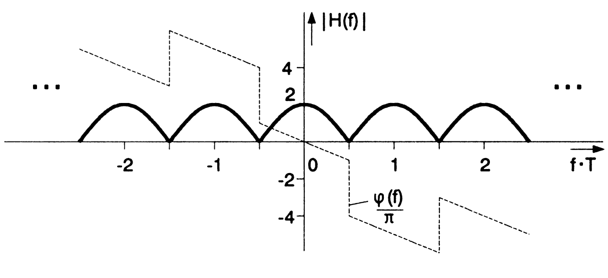
$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - T) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; H(f) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT}\cos(\pi fT)$$

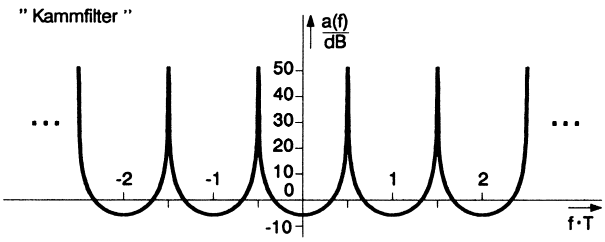
$$\Rightarrow |H(f)| = 2|\cos(\pi fT)|$$

$$\varphi(f) = -\pi fT + \begin{cases} \pm\pi, & \text{für} \quad \cos(\pi fT) < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a(f) = -20\lg|H(f)|\,\mathrm{dB} = -20\lg|2\cos(\pi fT)|\,\mathrm{dB}$$

Phasensprünge des Phasenspektrums $\varphi(f)$ betragen $\pm\pi$.

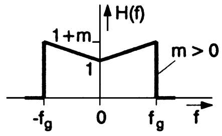




Aufgabe 5.8

$$H(f) = \left(1 + m\frac{|f|}{f_\mathrm{g}}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right)$$

oder umgeformt:



$$H(f) = (1 + m)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right) - m \cdot \Lambda\left(\frac{f}{f_\mathrm{g}}\right)$$

$\bullet$
$\circ$

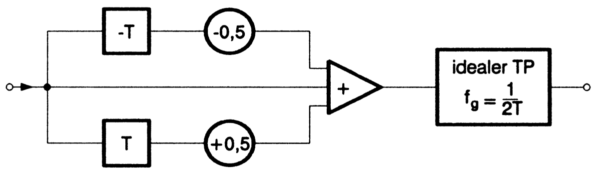
$h(t) = (1+m)2f_\mathrm{g}\mathrm{si}(\pi 2 f_\mathrm{g} t) - m f_\mathrm{g}\mathrm{si}^2(\pi f_\mathrm{g} t)$

Mit $T = \dfrac{1}{2f_\mathrm{g}}$ ergibt sich für die Echoamplituden:

$h(nT) = \dfrac{1}{T}\left[(1+m)\mathrm{si}(\pi n) - \dfrac{m}{2}\mathrm{si}^2\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)\right]$

Aufgabe 5.9

Blockschaltbild des Übertragungssystems:



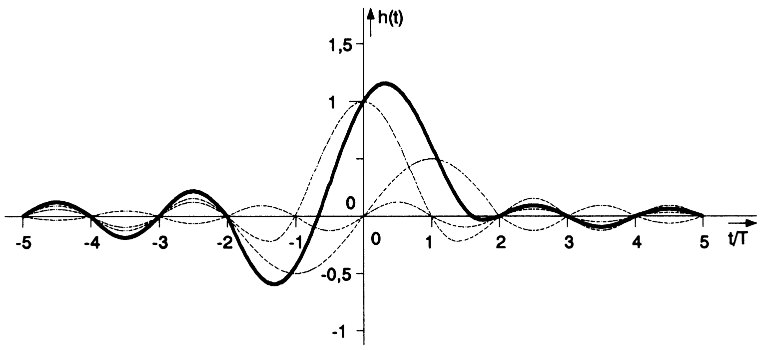
$$h(t) = \left[-\frac{1}{2}\delta(t+T) + \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-T)\right] * \mathrm{si}\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

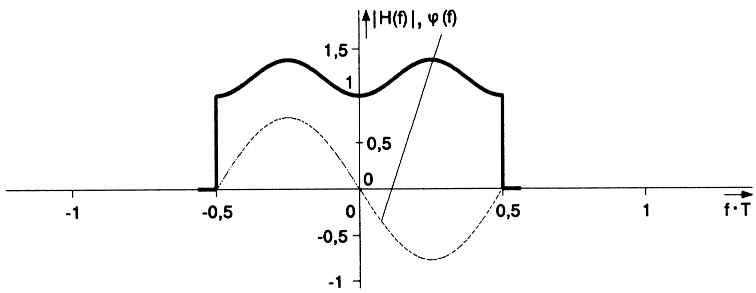
$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$H(f) = [1 - \mathrm{j}\sin(2\pi T f)] \cdot T \cdot \mathrm{rect}(fT)$

$|H(f)| = \sqrt{1+\sin^2(2\pi T f)} \cdot T \cdot \mathrm{rect}(fT)$

$\varphi(f) = \arctan\left(\dfrac{-\sin(2\pi T f)}{1}\right) = -\arctan[\sin(2\pi T f)]$





Aufgabe 5.10

a) $h_0(t) = \mathrm{si}\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)$ und $h_1 = a\,\mathrm{si}\left(\pi\dfrac{t-T}{T}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_0(t) = \frac{\dfrac{\pi t}{T}\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)}{\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{T}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_1(t) = a\frac{\pi\dfrac{t-T}{T}\cos\left(\pi\dfrac{t-T}{T}\right) - \sin\left(\pi\dfrac{t-T}{T}\right)}{\left(\pi\dfrac{t-T}{T}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{T}$$

für $t = 2T$ folgt

$h_0'(2T) = \dfrac{1}{2T}$ und $h_1'(2T) = -\dfrac{a}{T}$

mit $h_0'(2T) \overset{!}{=} -h_1'(2T)$ ergibt sich: $a = \dfrac{1}{2}$.

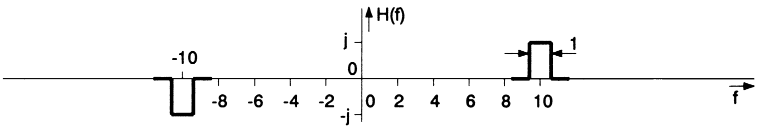
b) $s(t) = 0{,}5\delta(t+T) + \delta(t) + 0{,}5\delta(t-T)$

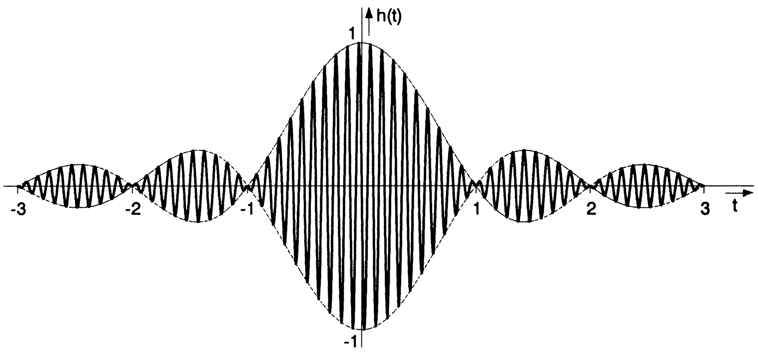
Aufgabe 5.11

$$h(t) = \mathrm{Re}\{h_\mathrm{T}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\} = \mathrm{Re}\{\mathrm{j}\,\mathrm{si}(\pi t)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}20\pi t}\}$$
$$= -\mathrm{si}(\pi t)\cdot\sin(20\pi t)$$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$H(f) = \mathrm{rect}(f) * \left[\frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f-10) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f+10)\right]$$
$$= \frac{1}{2}H_\mathrm{T}(f-f_0) + \frac{1}{2}H_\mathrm{T}^*(-f-f_0) = \frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{rect}(f-10) - \frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{rect}(f+10)$$

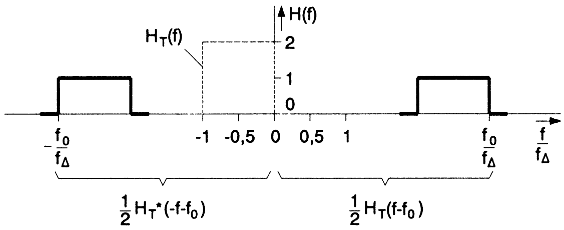




Aufgabe 5.12

Es gilt:

$$H(f) = \frac{1}{2} H_\mathrm{T}(f - f_0) + \frac{1}{2} H_\mathrm{T}^*(-f - f_0), \text{ wobei } H_\mathrm{T}(f) = 0 \forall f < -f_0$$



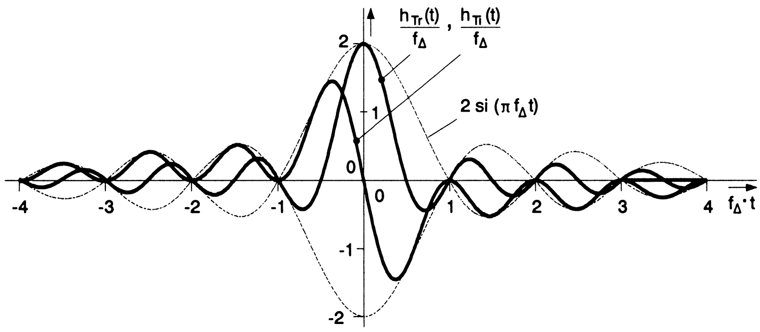
$$H_\mathrm{T}(f) = 2[H(f) \cdot \varepsilon(f)] * \delta(f + f_0) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{f + f_\Delta/2}{f_\Delta}\right)$$

$$h_\mathrm{T}(t) = 2 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f_\Delta t}$$

$$h_\mathrm{Tr}(t) = \mathrm{Re}\{h_\mathrm{T}(t)\} = 2 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \cos(\pi f_\Delta t)$$

$$h_\mathrm{Ti}(t) = \mathrm{Im}\{h_\mathrm{T}(t)\} = -2 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \sin(\pi f_\Delta t)$$

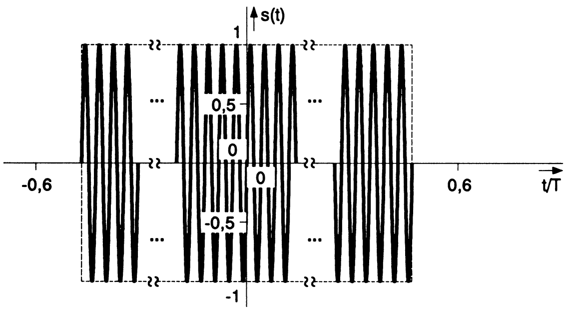
$$\begin{aligned} h(t) &= \mathrm{Re}\{2 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f_\Delta t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\} \\ &= 2 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \cos\left[2\pi \left(f_0 - \frac{f_\Delta}{2}\right) t\right] . \end{aligned}$$

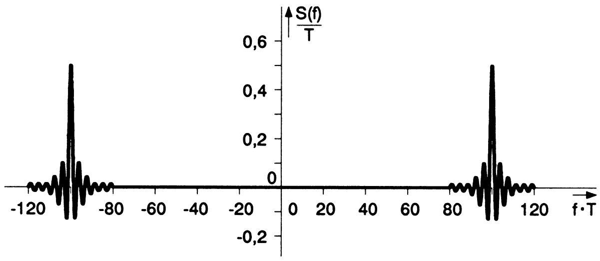


Aufgabe 5.13

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(100/T)t}\right\} = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(200\frac{\pi t}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} S(f) &= T\mathrm{si}(\pi f T) * \left[\frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{100}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{100}{T}\right)\right] \\ &= \frac{T}{2}\mathrm{si}[\pi(fT + 100)] + \frac{T}{2}\mathrm{si}[\pi(fT - 100)] \end{aligned}$$





Aufgabe 5.14

Es gilt:
$s(t) = \mathrm{Re}\{s_\mathrm{T}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\}$ für reelle BP-Signale, wobei
$s_+(t) = s_\mathrm{T}(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_+(f) = S_\mathrm{T}(f - f_0)$

Mit Bedingung (5.30), d.h. $S_\mathrm{T}(f) = 0$ für $f \leq -f_0$ ergibt sich:
$S_+(f) = 0 \quad$ für $\quad f \leq 0$

Für das äquivalente Tiefpassamplitudendichtespektrum gilt:
$S_\mathrm{T}(f) = 2[S(f) \cdot \varepsilon(f)] * \delta(f + f_0)$

$\Rightarrow S_+(f) = S_T(f - f_0) = 2S(f) \cdot \varepsilon(f)$

mit $2\varepsilon(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, \delta(t) + \frac{\mathrm{j}}{\pi t}$ ergibt sich:
$s_+(t) = s(t) + \mathrm{j}\left(\dfrac{1}{\pi t} * s(t)\right) = s(t) + \mathrm{j}\hat{s}(t)$

Aufgabe 5.15

$s_2(t) = -s(t)\sin(2\pi f_0 t)$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$S_2(f) = -S(f) * \left[\dfrac{\mathrm{j}}{2}\delta(f + f_0) - \dfrac{\mathrm{j}}{2}\delta(f - f_0)\right]$

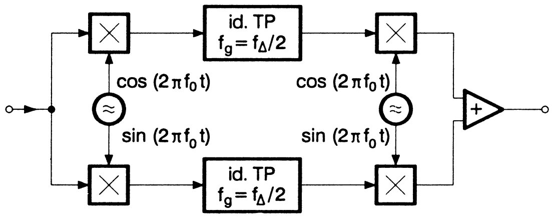
Mit $S(f) = \dfrac{1}{2}S_\mathrm{T}(f - f_0) + \dfrac{1}{2}S_\mathrm{T}^*(-f - f_0)$ (5.30)

Durch anschließende Tiefpassfilterung fallen die Spektren bei $\pm 2f_0$ weg, so das folgt: $-\dfrac{\mathrm{j}}{4}S_\mathrm{T}(f) + \dfrac{\mathrm{j}}{4}S_\mathrm{T}^*(-f)$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$

$-\dfrac{\mathrm{j}}{4}s_\mathrm{T}(t) + \dfrac{\mathrm{j}}{4}s_\mathrm{T}^*(t) = \dfrac{\mathrm{j}}{4}[s_\mathrm{T}^*(t) - s_\mathrm{T}(t)] = \dfrac{1}{2}s_{\mathrm{Ti}}(t)$.

Aufgabe 5.16



Aufgabe 5.17

in (5.54) $f_0 = 0$ einsetzen

$$\Rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{\mathrm{T}}(nT)\mathrm{si}\left[\pi\frac{t-nT}{T}\right] \quad \text{mit } T = \frac{1}{f_\Delta} \qquad \text{vergl. mit (4.8)!}$$

Aufgabe 5.18

Da mit $g(t) = s_1(t) + s_2(t)$ auch für die äquivalenten TP-Signale gilt:

$g_{\mathrm{T}}(t) = s_{1_{\mathrm{T}}}(t) + s_{2_{\mathrm{T}}}(t)$, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|g_{\mathrm{T}}(t)|^2 &= g_{\mathrm{T}}(t)\cdot g_{\mathrm{T}}^*(t)\\
&= [s_{1_{\mathrm{T}}}(t) + s_{2_{\mathrm{T}}}(t)]\cdot[s_{1_{\mathrm{T}}}^*(t) + s_{1_{\mathrm{T}}}^*(t)]\\
&= |s_{1_{\mathrm{T}}}(t)|^2 + |s_{2_{\mathrm{T}}}(t)|^2 + s_{1_{\mathrm{T}}}(t)\cdot s_{2_{\mathrm{T}}}^*(t) + s_{1_{\mathrm{T}}}^*(t)\cdot s_{2_{\mathrm{T}}}(t)\\
&= |s_{1_{\mathrm{T}}}(t)|^2 + |s_{2_{\mathrm{T}}}(t)|^2 + 2\Re\{s_{1_{\mathrm{T}}}(t)\cdot s_{2_{\mathrm{T}}}^*(t)\}\\
&= |s_{1_{\mathrm{T}}}(t)|^2 + |s_{2_{\mathrm{T}}}(t)|^2 + 2|s_{1_{\mathrm{T}}}(t)||s_{2_{\mathrm{T}}}(t)|\cos(\Theta_{1_{\mathrm{T}}} - \Theta_{2_{\mathrm{T}}})
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.19

Idee: Man bestimme die äquivalenten Tiefpassimpulsantworten zu $h_1(t)$ und $h_2(t)$ und berechne $g_1(t)$ und $g_2(t)$ als Funktion der entsprechenden äquivalenten Tiefpasssignale.

$$h_1(t) = \mathrm{Re}\{h_{\mathrm{Tr}}(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\} \Rightarrow h_{1_{\mathrm{T}}}(t) = h_{\mathrm{Tr}}(t)$$

$$h_2(t) = \mathrm{Re}\{-\mathrm{j}h_{\mathrm{Tr}}(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\} \Rightarrow h_{2_{\mathrm{T}}}(t) = -\mathrm{j}h_{\mathrm{Tr}}(t)$$

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \mathrm{Re}\{g_{1_{\mathrm{T}}}(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{[s_{\mathrm{T}}(t) * h_{1_{\mathrm{T}}}(t)]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{[s_{\mathrm{T}}(t) * h_{\mathrm{Tr}}(t)]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\}
\end{aligned}$$

ebenso:

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle\{s_{\mathrm{T}}(t) * [-\mathrm{j}h_{\mathrm{Tr}}(t)]\}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\rangle\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{[-\mathrm{j}s_{\mathrm{T}}(t) * h_{\mathrm{Tr}}(t)]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\} \qquad .\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{[s_{\mathrm{T}}(t) * h_{\mathrm{Tr}}(t)]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\}\,, \quad \text{da } \mathrm{Re}\{-\mathrm{j}z\} = \mathrm{Re}\{z\}
\end{aligned}$$

$$g(t) = \sqrt{g_1^2(t) + g_2^2(t)}$$

$$= \left| \frac{1}{2}[s_\mathrm{T}(t) * h_\mathrm{Tr}(t)] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \right| = \frac{1}{2}|s_\mathrm{T}(t) * h_\mathrm{Tr}(t)| = |g_\mathrm{T}(t)|$$

Für $t = 0$ gilt:

$$g_1(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{s_\mathrm{T}(t) * h_\mathrm{Tr}(t)\}|_{t=0} = \mathrm{Re}\{g_\mathrm{T}(t)\}|_{t=0}$$

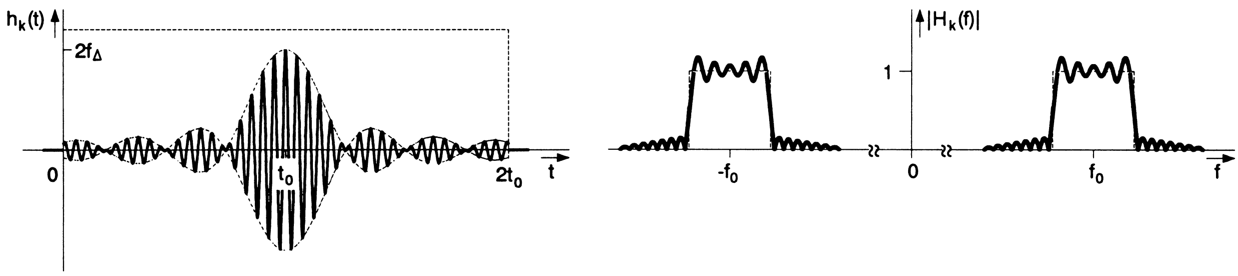
$$g_2(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{s_\mathrm{T}(t) * h_\mathrm{Tr}(t)\}|_{t=0} = \mathrm{Im}\{g_\mathrm{T}(t)\}|_{t=0}$$

Aufgabe 5.20

$$h_\mathrm{k}(t) = \left[f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2t_0}\right) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t) \right] * \delta(t - t_0)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H_\mathrm{k}(f) = \left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * [2t_0 \mathrm{si}(2\pi t_0 f)] * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \right\} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi t_0 f}$$



Aufgabe 5.21

$s^2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) * S(f)$ damit verdoppelt sich die Grenzfrequenz

$s^n(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) * S(f) * \ldots * S(f)$ damit wird die Grenzfrequenz n-mal so groß.
Ist $s(t)$ ein ideales Bandpaßsignal, so gilt:
$s(t) = f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t)$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

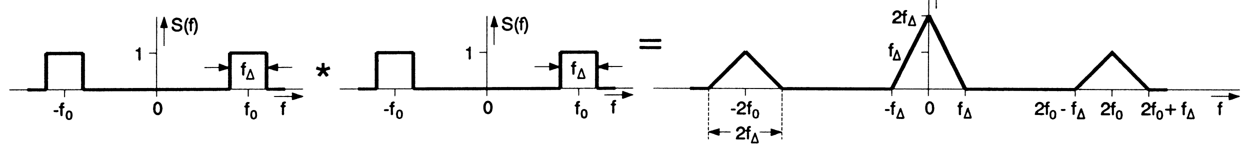
$$S(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$s^2(t) = 2f_\Delta^2 \mathrm{si}^2(\pi f_\Delta t) \cdot [1 + \cos(4\pi f_0 t)]$$

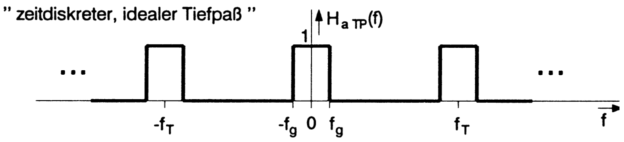
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S(f) * S(f) = 2f_\Delta \Lambda\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f - 2f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + 2f_0)\right]$$

beziehungsweise:



Aufgabe 5.22

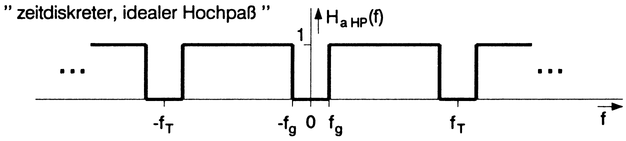


$$H_{\mathrm{aTP}}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{\mathrm{g}}}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_{\mathrm{T}})$$

$$h_{\mathrm{aTP}}(t) = 2f_{\mathrm{g}}\mathrm{si}(\pi 2f_{\mathrm{g}}t) \cdot \frac{1}{|f_{\mathrm{T}}|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_{\mathrm{T}}}\right) \mathrm{mit} f_{\mathrm{T}} = \frac{1}{T}$$

$$= 2f_{\mathrm{g}}T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}}Tn)\delta(t - nT)$$

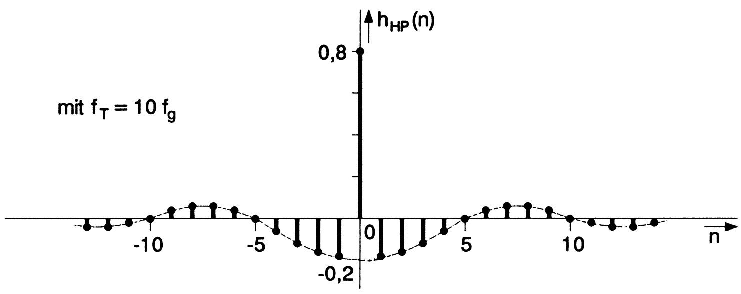
$$\Rightarrow h_{\mathrm{TP}}(n) = 2f_{\mathrm{g}}T\mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}}Tn)$$



$$H_{\mathrm{aHP}}(f) = 1 - H_{\mathrm{aTP}}(f)$$

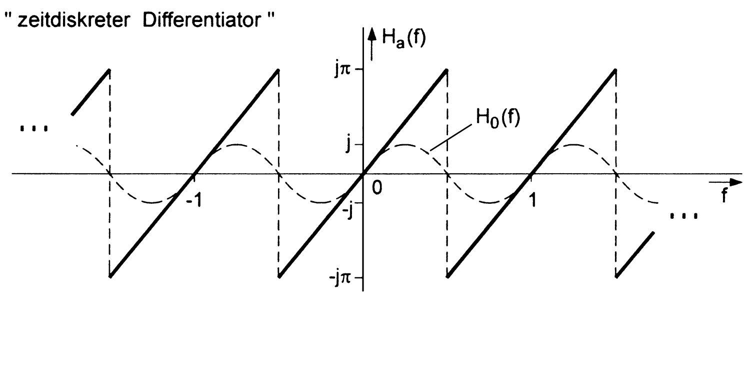
$$h_{\mathrm{aHP}}(t) = \delta(t) - h_{\mathrm{aTP}}(t)$$

$$\Rightarrow h_{\mathrm{HP}}(n) = \delta(n) - 2f_{\mathrm{g}}T\mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}}Tn)$$



Aufgabe 5.23

a)



b) $H_\mathrm{a}(f) = [\mathrm{j}2\pi f \mathrm{rect}(f)] * \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$

$$\bullet\!\!-\!\!\!\circ$$

$$h_\mathrm{a}(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{si}(\pi t)\right] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$= \frac{\pi^2 t\cos(\pi t) - \pi \cdot \sin(\pi t)}{\pi^2 t^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi n \cdot \cos(\pi n) - \sin(\pi n)}{\pi n^2} \cdot \delta(t-n)$$

mit

$$h(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{si}(\pi t)|_{t=0} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} H_\mathrm{a}(f)\mathrm{d}f = 0$$

$$h_\mathrm{a}(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}\,\delta(t-n), & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ \frac{\cos(\pi n)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}, & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

c) $h_0 \quad = \frac{1}{2}\delta(n+1) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

$$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$$

$H_0(f) = \mathrm{j}\sin(2\pi f)$

also Näherung an $H_\mathrm{a}(f)$ für $|f| \ll 1$ (s. Abbildung)

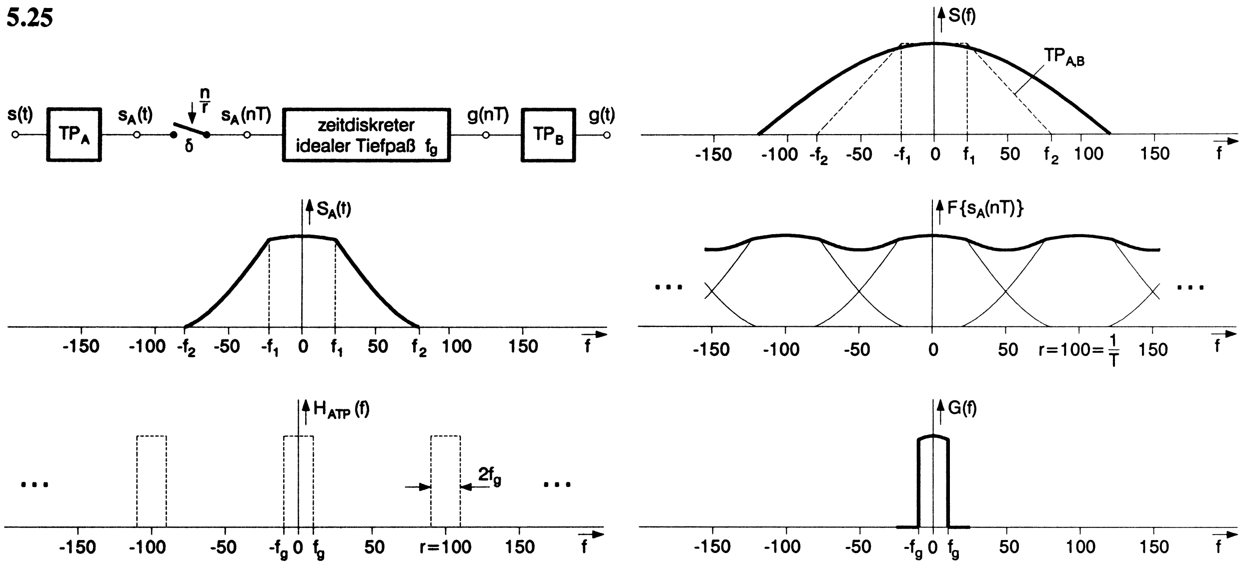
Aufgabe 5.24

$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\ h(t) = 2f_\mathrm{g}\mathrm{si}(\pi 2 f_\mathrm{g} t)$

Die erste Nullstelle liegt bei $t_0 = \frac{1}{2f_\mathrm{g}}$.

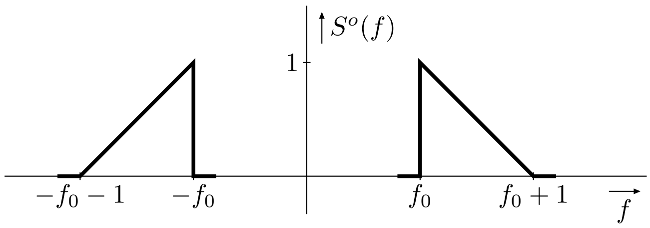
Die Anzahl der diskreten Werte zwischen Hauptmaximum bei $t = 0$ und 1. Nulldurchgang bei $t_0 = \frac{1}{2f_\mathrm{g}}$ bei gegebener Rate r beträgt: $N = \frac{t_0}{1/r} = \frac{r}{2f_\mathrm{g}}$ $\Rightarrow$ a) $N = 5$ b) $N = 100$

Aufgabe 5.25



$$\Rightarrow f_1 > f_g \text{ und } f_2 < r - f_{\mathrm{g}} = \frac{1}{T} - f_{\mathrm{g}}$$

Aufgabe 5.26

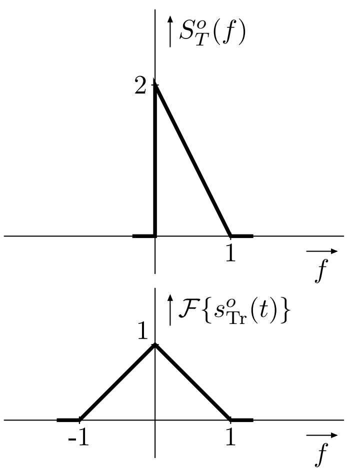


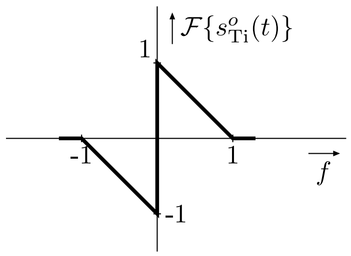
a) $S^{\mathrm{o}}_{\mathrm{T}}(f) = 2 \cdot \Lambda(f) \cdot \varepsilon(f)$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

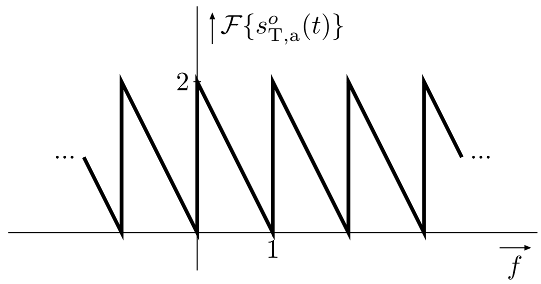
$$s^{\mathrm{o}}_{\mathrm{T}}(t) = 2\mathrm{si}^2(\pi t) * \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \mathrm{j}\frac{1}{2\pi t}\right] = \mathrm{si}^2(\pi t) + \mathrm{j}\,\underbrace{\mathrm{si}^2(\pi t) * \frac{1}{\pi t}}_{\widehat{\mathrm{si}^2(\pi t)}}$$

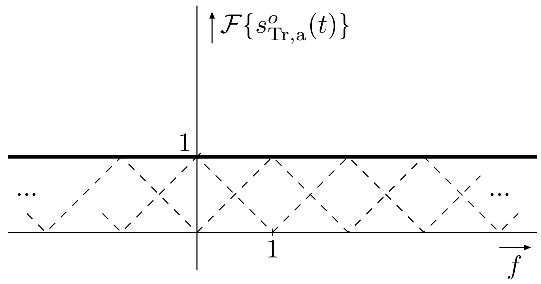
b)

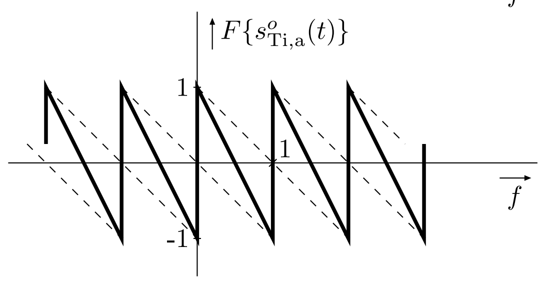




c)







Rekonstruktion mit $H(f) = \mathrm{rect}\left(f - \dfrac{1}{2}\right)$

d) ja, mit $S_{\mathrm{T}}(f) = S^{\mathrm{o}}_{\mathrm{T}}(f) + S^{\mathrm{o}}_{\mathrm{T}}(-f)$

und $S^{\mathrm{o}}_{\mathrm{T}}(f) = S^{\mathrm{o}}_{\mathrm{T,a}}(f) \cdot H_{\mathrm{TP}}(f)\ ,\quad H_{\mathrm{TP}}(f) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{2}\right)$

Zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1

$$|p_{sg}^{\mathrm{E}}|^2 = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t) \cdot g(t)}{\sqrt{E_s \cdot E_g}} \mathrm{d}t \right|^2 \leq \frac{1}{E_s} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{E_g} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(t) \mathrm{d}t$$

Mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t = E_s,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\mathrm{d}t = E_g \Rightarrow |p_{sg}^{\mathrm{E}}|^2 \leq 1$

Aufgabe 6.2

$s(t) = \text{reell} \Rightarrow s(t) = s_{\mathrm{u}}(t) + s_{\mathrm{g}}(t)$ mit

$s_{\mathrm{g}}(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)]$ und $s_{\mathrm{u}}(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)]$ reell

$\varphi_{s_{\mathrm{u}} s_{\mathrm{g}}}^{\mathrm{E}}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_{\mathrm{u}}(t) \cdot s_{\mathrm{g}}(t) \mathrm{d}t = 0\,,\quad$ da $s_{\mathrm{u}}(t) \cdot s_{\mathrm{g}}(t)$ ungerade

$\Rightarrow s_{\mathrm{u}}(t)$ und $s_{\mathrm{g}}(t)$ sind orthogonal

Aufgabe 6.3

Bei periodischen Signalen genügt die Berechnung über eine ganze Zahl von Perioden, hier z.B. mit $T = 1$:

a) $$\varphi_{s_1 s_1}^{\mathrm{L}}(\tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} a \cos(2\pi t) \cdot a \cos[2\pi(t+\tau)] \mathrm{d}t = \frac{1}{2} a^2 \cos(2\pi\tau)$$

$$\varphi_{s_2 s_2}^{\mathrm{L}}(\tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} a \sin(2\pi t) \cdot a \sin[2\pi(t+\tau)] \mathrm{d}t = \frac{1}{2} a^2 \cos(2\pi\tau)$$

$$\varphi_{s_3 s_3}^{\mathrm{L}}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t+\tau) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ \text{, da}$$

Fall 1:

$$\tau < 0, \varphi_{s_3 s_3}^{\mathrm{L}}(\tau) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{0}^{T} \varepsilon(t+\tau) \mathrm{d}t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T}(T+\tau) = \frac{1}{2} + \lim_{T \to \infty} \frac{\tau}{2T} = \frac{1}{2}$$

Fall 2:

$$\tau \geq 0, \varphi_{s_3 s_3}^{\mathrm{L}}(\tau) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{0}^{T} \varepsilon(t) \mathrm{d}t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$$

b) $$\varphi^{\mathrm{L}}_{s_1s_1}(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} a\cos(2\pi t)\cdot a\sin[2\pi(t+\tau)]\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}a^2\int\limits_{-1}^{1}(\sin(2\pi\tau)+\sin[2\pi(2t+\tau)])\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}a^2\sin(2\pi\tau) \qquad \text{(orthogonal!)}$$

Aufgabe 6.4

$$s(-\tau)\star g(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(-t)\cdot g(t+\tau)\mathrm{d}t$$

Mit $\Theta = t+\tau, \mathrm{d}\Theta = \mathrm{d}t$ und $-t = \tau - \Theta \Rightarrow$

$$s(-\tau)\star g(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(\tau-\Theta)\cdot g(\Theta)\mathrm{d}\Theta = g(\tau)*s(\tau) = s(\tau)*g(\tau)$$

Aufgabe 6.5

a) Kommutativ: Nein

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{sg}(\tau) = s(\tau)\star g(\tau) = s(-\tau)*g(\tau)$$

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{gs}(\tau) = g(\tau)\star s(\tau) = g(-\tau)*s(\tau) = \varphi^{\mathrm{E}}_{sg}(-\tau)$$

i.a. gilt: $\varphi^{\mathrm{E}}_{sg}(\tau) \neq \varphi^{\mathrm{E}}_{gs}(\tau)$

b) Assoziativ: Nein

$$\begin{aligned}[s(\tau)\star g(\tau)]\star h(\tau) &= [s(-\tau)*g(\tau)]\star h(\tau)\\ &= s(\tau)*g(-\tau)*h(\tau)\\ s(\tau)\star[g(\tau)\star h(\tau)] &= s(\tau)\star[g(-\tau)*h(\tau)]\\ &= s(-\tau)*g(-\tau)*h(\tau)\end{aligned}$$

Da i.a. $s(\tau)\neq s(-\tau) \Rightarrow [s(\tau)\star g(\tau)]\star h(\tau) \neq s(\tau)\star[g(\tau)\star h(\tau)]$

c) Distributiv: Ja

$$g(\tau)\star[s(\tau)+h(\tau)] = g(-\tau)*[s(\tau)+h(\tau)]$$

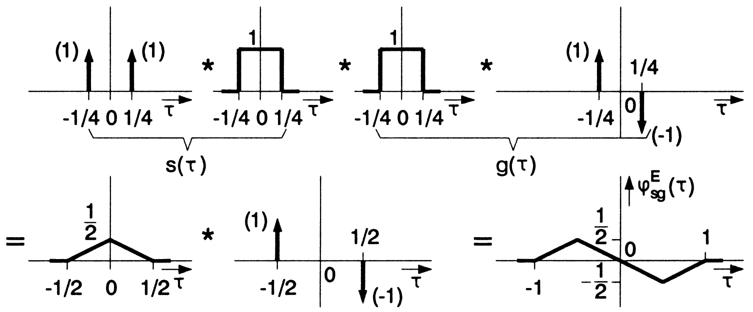
$$= [g(-\tau)*s(\tau)]+[g(-\tau)*h(\tau)] = [g(\tau)\star s(\tau)]+[g(\tau)\star h(\tau)]$$

Aufgabe 6.6

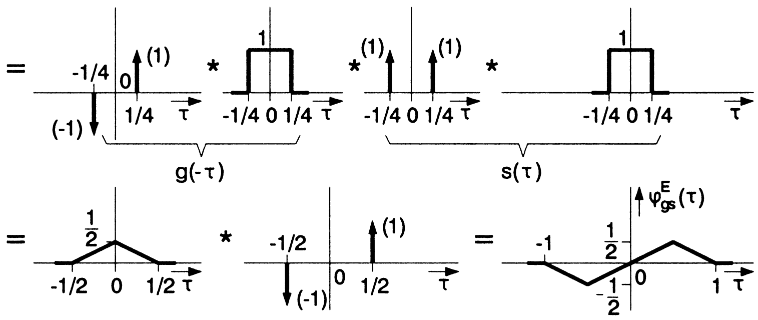
Wegen $s(t)\star g(t) = s(-t)*g(t)$ haben die Korrelationsfunktion und das Faltungsprodukt die gleiche Dauer $T_{\mathrm{ges}} = T_1 + T_2$

Aufgabe 6.7

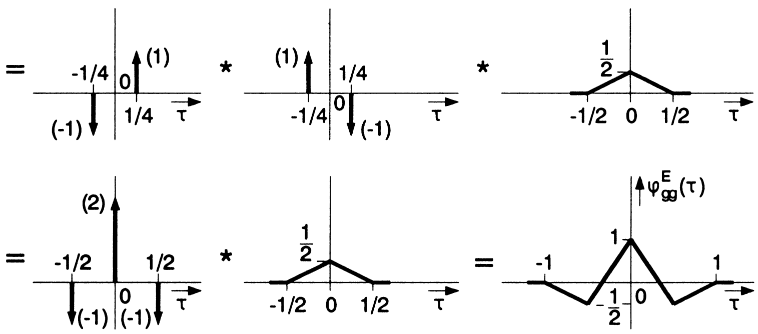
$\varphi^{\mathrm{E}}_{sg}(\tau) = s(-\tau)*g(\tau) = s(\tau)*g(\tau)$wegen $s(-\tau) = s(\tau)$



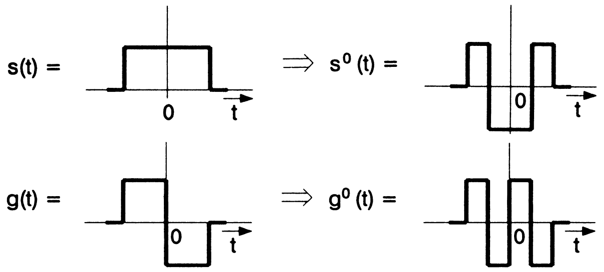
$\varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau) = g(-\tau) * s(\tau)$



$\varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(\tau) = g(-\tau) * g(\tau)$



Aufgabe 6.8



$s \perp g, s \perp s^0, s \perp g^0, g \perp s, g \perp s^0, g \perp g^0$

Da jeweils $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t)\mathrm{d}t = 0$

(vgl. Aufgabe 6.21: Walsh-Funktionen)

Aufgabe 6.9

a) $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \mathrm{e}^{-\pi f^2}$

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) = \mathrm{e}^{-\pi(-\tau)^2} * \mathrm{e}^{-\pi\tau^2} = \mathrm{e}^{-\pi\tau^2} * \mathrm{e}^{-\pi\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\pi\tau^2/2}$$

$\uparrow$ Aufg. 2.8

$$|S(f)|^2 = \mathrm{e}^{-2\pi f^2} \Rightarrow E = \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $s(t) = \Lambda(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \mathrm{si}^2(\pi f)$

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) = \Lambda(-\tau) * \Lambda(\tau) = \Lambda(\tau) * \Lambda(\tau)$$

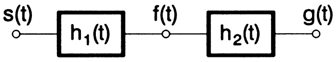
$$|S(f)|^2 = \mathrm{si}^4(\pi f)\ , \ E = \int\limits_{-1}^{1} \Lambda^2(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{1} (1-t)^2\mathrm{d}t = 2/3$$

c) $s(t) = \mathrm{si}(\pi t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \mathrm{rect}(f)$

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) = \mathrm{si}(-\pi\tau) * \mathrm{si}(\pi\tau) = \mathrm{si}(\pi\tau) * \mathrm{si}(\pi\tau) = \mathrm{si}(\pi\tau)$$

$$|S(f)|^2 = \mathrm{rect}(f)\ , \ E = \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(0) = 1$$

Aufgabe 6.10



$s(t) * h_1(t) = f(t),\ f(t) * h_2(t) = g(t)$

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{E}}_{fg}(\tau) &= f(\tau) * g(\tau) = f(-\tau) * f(\tau) * h_2(\tau) \\
&= s(-\tau) * h_1(-\tau) * s(\tau) * h_1(\tau) * h_2(\tau) \\
&= [s(-\tau) * s(\tau)] * [h_1(-\tau) * h_1(\tau)] * h_2(\tau) \\
&= \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) * \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1h_1}(\tau) * h_2(\tau)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.11

$s(t) = \delta(t) + \delta(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S(f) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}$

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) &= [\delta(-\tau) + \delta(-\tau - T)] * [\delta(\tau) + \delta(\tau - T)] \\
&= [\delta(\tau) + \delta(\tau + T)] * [\delta(\tau) + \delta(\tau - T)] \\
&= \delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau + T - T) \\
&= 2\delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau - T)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}\circ\\ |\\ \bullet\end{array}$$

$|S(f)|^2 = 2 + 2\cos(2\pi fT)$

Aufgabe 6.12

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{E}}_{s\hat{s}}(\tau) &= s(-\tau) * s(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau - u) \cdot \frac{1}{\pi u}\mathrm{d}u = \hat{\varphi}^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau)
\end{aligned}$$

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{s\hat{s}}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(u) \cdot \frac{1}{\pi u}\mathrm{d}u$$

im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(u) \frac{1}{\pi u}\mathrm{d}u + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(u) \frac{1}{\pi u}\mathrm{d}u \right] = 0$$

$\left(\text{da } \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(u) \text{ gerade und } \frac{1}{\pi u} \text{ ungerade}\right)$

$\Rightarrow s(t)$ und $\hat{s}(t)$ sind orthogonal.

Aufgabe 6.13

Es gilt: $\varphi^{\mathrm{E}}_{sg}(\tau) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Aufgabe 6.10}}}{\varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) * h(\tau)}$

mit $s(t) = \mathrm{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow \varphi^{\mathrm{E}}_{ss}(\tau) = T \cdot \mathrm{si}\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)$

$$\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau) = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(\tau) * \delta(\tau - nT) = T \cdot \mathrm{si}\left(\pi \frac{\tau - nT}{T}\right)$$

$$\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(0) = T \cdot \mathrm{si}(-n\pi) = 0, \text{ falls } n \neq 0 \Rightarrow s(t) \text{ und } g(t) \text{ sind orthogonal}$$

Aufgabe 6.14

Nach 3.23 gilt: $|G(f)| \leq \dfrac{1}{|(2\pi f)^n|} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t) \right| \mathrm{d}t$

für $n = 0 \Rightarrow |G(f)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \mathrm{d}t$

mit $g(t) = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(f) = |S(f)|^2$

$$\Rightarrow |S(f)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(\tau)| \mathrm{d}\tau$$

Aufgabe 6.15

$$\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) g(t+\tau) \mathrm{d}t$$

$$\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) g(t+\tau) \mathrm{d}t \right|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufgabe 6.1}}}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t+\tau) \mathrm{d}t$$

$$= E_s \cdot E_g$$

$$E_s = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0)\ , \quad E_g = \varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(0) \Rightarrow |\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau)| \leq \sqrt{\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0) \cdot \varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(0)}$$

Aufgabe 6.16

Nach 6.9 gilt $\quad \phi_{sg}^{\mathrm{E}}(f) = S^*(f) \cdot G(f) \Rightarrow \phi_{sg}^{\mathrm{E}}(0) = S^*(0) \cdot G(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau) \mathrm{d}\tau$

Außerdem gilt:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \mathrm{d}t\ , \quad G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathrm{d}t$$

Da $s(t)$ reell ist, folgt $S^*(0) = S(0)$

$$\Rightarrow \phi_{sg}^{\mathrm{E}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathrm{d}t = S(0) \cdot G(0)$$

Aufgabe 6.17

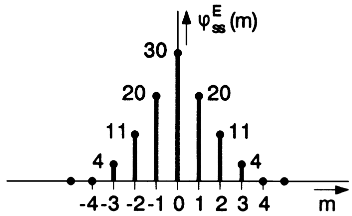
$u(t) = s(t) \pm g(t)$

$$\varphi_{uu}^{\mathrm{E}}(\tau) = u(-\tau) * u(\tau) = [s(-\tau) \pm g(-\tau)] * [s(\tau) \pm g(\tau)]$$
$$= \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(\tau) + \varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(\tau) \pm (\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(\tau) + \varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau))$$
$$E_u = \varphi_{uu}^{\mathrm{E}}(0) = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0) + \varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(0) \pm (\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(0) + \varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(0))$$
$$= E_s + E_g \pm 2\varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(0)$$
$$E_u = E_s + E_g \quad \text{für} \quad \varphi_{sg}^{\mathrm{E}}(0) = 0$$

Aufgabe 6.18

$$\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) = s(\tau) * s(-\tau)$$
$$\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(m) = s(m) * s(-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)s(n+m)$$

Lösung siehe Aufgabe 4.13

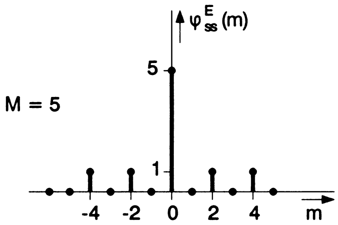


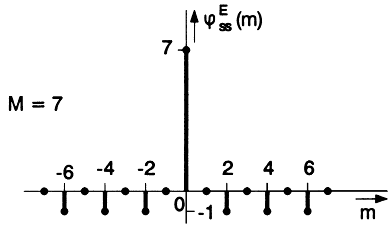
Aufgabe 6.19

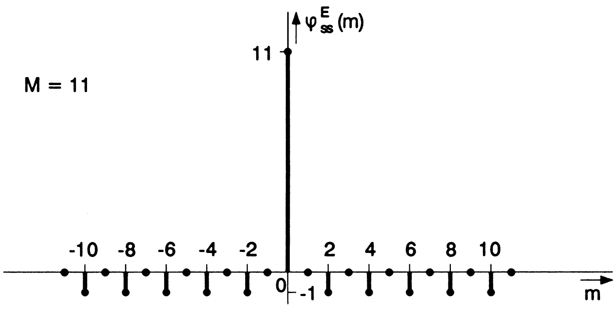
Beispiel: $M = 2$

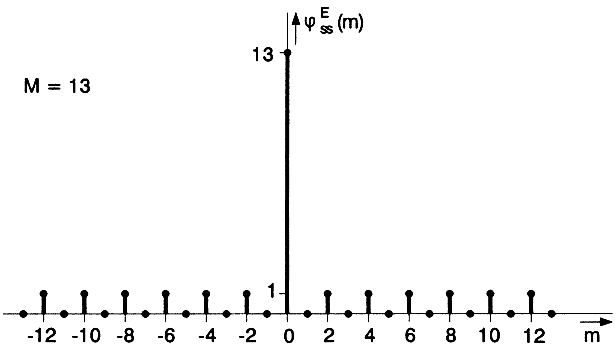
$$s(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(m) = s(-m) * s(m) = [\delta(-m) - \delta(-m-1)] * [\delta(m) - \delta(m-1)]$$
$$= [\delta(m) - \delta(m+1)] * [\delta(m) - \delta(m-1)]$$
$$= 2\delta(m) - \delta(m-1) - \delta(m+1)$$
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(n) = M = 2$$





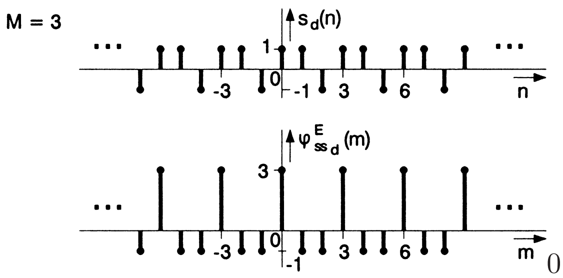




Aufgabe 6.20

Nach (6.40) gilt:

$$\varphi_{ssd}^{\mathrm{E}}(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_{\mathrm{d}}(n) \cdot s_{\mathrm{d}}(n+m) \ , \quad \text{für} \quad m = 0, \ldots, M-1$$



0

Aufgabe 6.21

a) $s_0(n) = + - + - + - + -$

$s_1(n) = + + - - + + - -$

$s_2(n) = + + + + - - - -$

$s_3(n) = + + + + + + ++$

orthogonal, da $\sum_{n=0}^{M-1} s_i(n) s_j(n) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$

evident, da bei jedem Paar genau die Hälfte der Elemente vorzeichengleich ist.

b)
$$s_0(n) \cdot s_1(n) = + - - + + - -+$$
$$s_0(n) \cdot s_2(n) = + - + - - + -+$$
$$s_1(n) \cdot s_2(n) = + + - - - - ++$$
$$s_0(n) \cdot s_1(n) \cdot s_2(n) = + - - + - + +-$$

Anzahl der Walsh-Folgen $= M$.

Die Produktfolgen sind orthogonal, da

$$\sum_{n=0}^{M-1} [s_i(n) \cdot s_j(n)] \cdot [s_i(n) \cdot s_k(n)] \quad \text{und mit} \quad s_i(n) \cdot s_i(n) = 1$$
$$= \sum_{n=0}^{M-1} s_j(n) \cdot s_k(n) \quad \text{für} \quad j \neq k.$$

Ersetzt man die Folgenelemente ± 1 durch positive bzw. negative Rechteckimpulse, dann erhält man die Walsh-Funktionen nach Abb. 8.13a. Die durch die Folgenelemente gebildeten orthogonalen Matrizen der Ordnung M werden auch Hadamard-Matrizen genannt. Hadamard-Matrizen existieren also für alle Ordnungen $M = 2^r$, weiter auch für sehr viele Ordnungen $M = 4a\,(a = 1, 2, 3\ldots)$. Die zugeordneten Funktionen werden daher auch Hadamard-Walsh-Folgen bzw. -Funktionen genannt (Lüke, 1992).

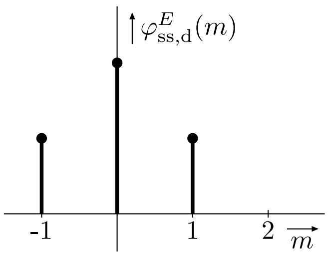
Aufgabe 6.22

a) $$m_{s_\mathrm{d}} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} s_\mathrm{d}(n) = \frac{N}{M};$$

$$E_{s_\mathrm{d}} = \sum_{n=0}^{M-1} |s_\mathrm{d}(n)|^2 = N;$$

b) $$\varphi^\mathrm{E}_{ss_\mathrm{d}}(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_\mathrm{d}(n) s_\mathrm{d}(n+m); \quad m = 0, \ldots, M-1$$

Beispiel für $M = 4, N = 2$



c) $$S_\mathrm{d}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s_\mathrm{d}(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kFn}\,; \quad F = \frac{1}{M}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \frac{1}{M} \cdot n} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{kN}{M}}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{k}{M}}} \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

$$|s_\mathrm{d}(k)|^2 = \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{kN}{M}\right)}{1 - \cos\left(2\pi \frac{k}{M}\right)}$$

Aufgabe 6.23

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0)$$

mit

$$\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(\tau) = \mathrm{Re}\{\varphi_{ss_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{E}}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 \tau}\} \Rightarrow \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0) = \varphi_{ss_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{E}}(0)$$

wegen

$$\varphi_{ss_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{E}}(\tau)\frac{1}{2}[s_{\mathrm{T}}^*(-\tau) * s_{\mathrm{T}}(\tau)] \Rightarrow \varphi_{ss_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{E}}(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s_{\mathrm{T}}(t)|^2\mathrm{d}t$$

somit gilt:

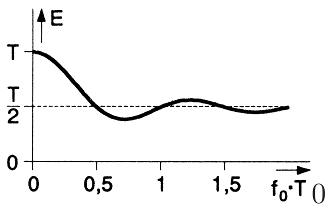
$$E = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |S_{\mathrm{T}}(f)|^2\mathrm{d}f \qquad \text{(mit Parsevalschem Theorem)}$$

für

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t) \qquad \text{(Beachte: \textit{nicht} bandbegrenzt!)}$$

a) $E = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \cos^2(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}[1 + \mathrm{si}(2\pi f_0 T)]$ (s. Abbildung)

b) $E \approx \frac{T}{2}$ für $f_0 \gg \frac{1}{T}$



Aufgabe 6.24

Orthogonalität zwischen $s(t)$ und $g(t)$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^*(t)g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S^*(f)\cdot G(f)\mathrm{d}f = 0$ (6.25)

mit $s_{\mathrm{T_r}}(t) = \mathrm{Re}\{s_{\mathrm{T}}(t)\} \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{\mathrm{T,g}}(f)$

und j $s_{\mathrm{T_i}}(t) = \mathrm{j}\ \mathrm{Im}\{s_{\mathrm{T}}(t)\} \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{\mathrm{T,u}}(f)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S_{\mathrm{T,g}}^*(f)}_{\text{gerade}} \cdot \underbrace{S_{\mathrm{T,u}}(f)}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}f = 0.$$

Zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1

Scharmittelwerte: $\mathcal{E}\{s(t_1)\} = \lim\limits_{M\to\infty} \dfrac{1}{M} \sum\limits_{k=1}^{M} {}^k s(t_1)$

a) Amplitudenwert durch Münze festgelegt

$\Rightarrow \mathrm{Prob}[0\,\mathrm{V}] = \mathrm{Prob}[2\,\mathrm{V}] = 1/2$

$$\mathcal{E}\{s(t_1)\} = \frac{1}{2}\cdot 0\,\mathrm{V} + \frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{V}$$

$$\mathcal{E}\{s^2(t_1)\} = \frac{1}{2}\cdot 0\,\mathrm{V}^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\,\mathrm{V}^2 = 2\,\mathrm{V}^2$$

$$\mathcal{E}\{s^3(t_1)\} = \frac{1}{2}\cdot 0\,\mathrm{V}^3 + \frac{1}{2}\cdot 8\,\mathrm{V}^3 = 4\,\mathrm{V}^3$$

$\mathcal{E}\{s(0)\cdot s(t_1)\} = \mathcal{E}\{s^2(t_1)\}$, da Werte der Gleichspannung für alle Zeiten konstant

$\Rightarrow$ stationärer Prozeß

b) Zeitmittelwert: $\overline{{}^k s(t)} = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} {}^k s(t)\mathrm{d}t$

1) $a_k = 0 \quad \Rightarrow$ alle Zeitmittelwerte 0

2) $a_k = 2\,\mathrm{V} \quad \Rightarrow \overline{s(t)} = 2\,\mathrm{V}$

$$\overline{s^2(t)} = 4\,\mathrm{V}^2$$

$$\overline{s^3(t)} = 8\,\mathrm{V}^3$$

Schar- und Zeitmittelwerte stimmen nicht überein $\Rightarrow$ nicht ergodisch

Aufgabe 7.2

a) Bei einem ergodischen Prozeßsind die Zeitmittelwerte für alle Musterfunktionen untereinander gleich, wenn die Mittelwertbildung über $T \to \infty$ erfolgt. Beim hier definierten Kurzzeitmittelwert ist dies i. a. nicht der Fall, weshalb $m(T)$ eine Zufallsgröße ist.

b)
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{m(T)\} &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} {}^k s(t)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} \left[\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} {}^k s(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} \mathcal{E}\{s(t)\}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\mathcal{E}\{s(t)\}\int\limits_{0}^{T} \mathrm{d}t = \mathcal{E}\{s(t)\} = \overline{s(t)},\ \text{da } s(t) \text{ ergodisch}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

(1) Gl. (7.12):

$$\mathcal{E}\{\sum_i a_i s_i(t_i)\} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \left[\sum_i a_i^k s_i(t_i) \right]$$
$$= \sum_i \left[a_i \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} {}^k s_i(t_i) \right] = \sum_i a_i \mathcal{E}\{s_i(t_i)\}$$

(2) $$\mu_{uv}(\tau) = \mathcal{E}\left\{ \left[u(t) - \mathcal{E}\{u(t)\}\right] \cdot \left[v(t+\tau) - \mathcal{E}\{v(t)\}\right] \right\}$$
$$= \mathcal{E}\{u(t)\cdot v(t+\tau)\} - \mathcal{E}\big\{u(t)\cdot \mathcal{E}\{v(t)\}\big\} - \mathcal{E}\big\{\mathcal{E}\{u(t)\}\cdot v(t+\tau)\big\} + \mathcal{E}\{u(t)\}\cdot\mathcal{E}\{v(t)\}$$
$$= \varphi_{uv}(\tau) - \mathcal{E}\{u(t)\}\cdot\mathcal{E}\{v(t)\}, \text{ da } \mathcal{E}\{v(t+\tau)\} = \mathcal{E}\{v(t)\} \text{ (stationär)}$$

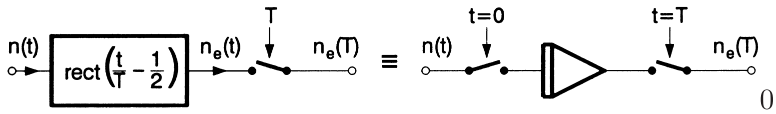
Aufgabe 7.4

$$\begin{aligned} P_\Delta &= \mathcal{E}\{[s(t) - s(t+\tau)]^2\} \\ &= \mathcal{E}\{s^2(t)\} \; + \mathcal{E}\{s^2(t+\tau)\} \; - 2\mathcal{E}\{s(t)s(t+\tau)\} \\ &= P \; + P \; - 2\varphi_{ss}(\tau) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_{ss}(\tau) = P - P_\Delta/2$$

Aufgabe 7.5

$$n_{\mathrm{e}}(T) = \int_0^T n(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)\mathrm{rect}\left(\frac{T-\tau-T/2}{T}\right)\mathrm{d}\tau$$
$$= \left[n(t) * \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\right]_{t=T}$$



0

$n_{\mathrm{e}}(t)$ ist stationär für jede Zeitkonstante T

$$\Rightarrow \mathcal{E}\{n_{\mathrm{e}}^2(t)\} = \mathcal{E}\{n_{\mathrm{e}}^2(T)\} = P_{\mathrm{T}} = [\varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^{\mathrm{E}}(\tau)]_{\tau=0} = \left[N_0 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]_{\tau=0}$$

$P_{\mathrm{T}} = N_0 \cdot T =$ Augenblicksleistung am Integratorausgang zum Zeitpunkt T $\Rightarrow$ Ausgangsprozeß des Integrators ist nicht stationär, da Augenblicksleistung nicht konstant.

Aufgabe 7.6

$$\begin{array}{lll} \text{Filter-Impulsantwort:} & h(t) & = \frac{1}{T}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t/T} \\ & & \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \\ \text{Übergangsfunktion:} & H(f) & = \frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi Tf} \\ & |H(f)|^2 & = \frac{1}{1+(2\pi Tf)^2} \\ & & \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \\ \text{Autokorrelationsfunktion:} & \varphi_{hh}^{\mathrm{E}}(\tau) & = \frac{1}{2T}\mathrm{e}^{-|\tau|/T} \text{ (s. Abschn. 4.4)} \end{array}$$

Weißes Rauschen: $\phi_{nn}(f) = N_0 \bullet\!\!-\!\!\circ \varphi_{nn}(\tau) = N_0\delta(\tau)$

a) $$\phi_{gg}(f) = \phi_{nn}(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{1+(2\pi Tf)^2}$$

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{gg}(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{1+(2\pi Tf)^2}\mathrm{d}f = \frac{N_0}{2T}$$

b) $$\varphi_{gg}(\tau) = \varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^{\mathrm{E}}(\tau) = \big[N_0\delta(\tau)\big] * \left[\frac{1}{2T}\mathrm{e}^{-|\tau|/T}\right] = \frac{N_0}{2T}\mathrm{e}^{-|\tau|/T}$$

$$P_g = \varphi_{gg}(0) = \frac{N_0}{2T}$$

Aufgabe 7.7

a) $$\begin{aligned} \varphi_{gf}(\tau) &= \mathcal{E}\big\{g(t)\cdot f(t+\tau)\big\} = \mathcal{E}\Big\{\big[s(t)*h_1(t)\big]\cdot\big[s(t+\tau)*h_2(t)\big]\Big\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\Theta)s(t-\Theta)\mathrm{d}\Theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\mu)s(t+\tau-\mu)\mathrm{d}\mu\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\big\{s(t-\Theta)s(t+\tau-\mu)\big\}h_1(\Theta)h_2(\mu)\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Substitution:

$\mu = \nu + \Theta$, $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\nu$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\big\{s(t-\Theta)s(t+\tau-\Theta-\nu)\big\}h_1(\Theta)h_2(\Theta+\nu)\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}(\tau-\nu)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\Theta)h_2(\Theta+\nu)\mathrm{d}\Theta\right]\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}(\tau-\nu)\varphi_{h_1h_2}^{\mathrm{E}}(\nu)\mathrm{d}\nu = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1h_2}^{\mathrm{E}}(\tau) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

b) Orthogonal, d.h. $\varphi_{h_1h_2}^{\mathrm{E}}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_{gf}(0) &= \big[\varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1h_2}^{\mathrm{E}}(\tau)\big]_{\tau=0} = \big[N_0\delta(\tau) * \varphi_{h_1h_2}^{\mathrm{E}}(\tau)\big]_{\tau=0} \\ &= N_0\varphi_{h_1h_2}^{\mathrm{E}}(0) = 0 \end{aligned}$$

c) $g(t)$ und $f(t)$ unkorreliert $\Leftrightarrow \mu_{gf}(\tau) = \varphi_{gf}(\tau) - m_g \cdot m_f = 0$

$$\mu_{gf}(\tau) = \varphi_{gf}(\tau) - m_g \cdot m_f = [\varphi_{ss}(\tau) * \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(\tau)] - m_s^2 H_1(0) \cdot H_2(0)$$

Annahme:

$s(t)$ weißes Rauschen $\Rightarrow m_s^2 = 0$ und $\varphi_{ss}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$

$$\Rightarrow \mu_{gf}(\tau) = N_0 \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(\tau) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(\tau) = 0$ für alle τ bzw. $H_1^*(f) \cdot H_2(f) = 0$ für alle $f \Rightarrow$ Filter überlappungsfrei: $|H_1(f)| \cdot |H_2(f)| = 0$

Aufgabe 7.8

mit

$h_1(t) \quad = \delta(t), h_2(t) = h(t)$ folgt:

$$\varphi_{gf}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(\tau) \qquad \text{(s. Aufgabe 7.7a)}$$

$$\begin{array}{c}\circ\\ |\\ \bullet\end{array}$$

$$\phi_{gf}(f) = \phi_{ss}(f) H_1^*(f) \cdot H_2(f) = N_0 \cdot 1 \cdot H(f) = N_0 \cdot H(f)$$

$$\begin{array}{c}\circ\\ |\\ \bullet\end{array}$$

$$\varphi_{gf}(\tau) = N_0 \cdot h(\tau)$$

Aufgabe 7.9

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \Rightarrow |H(f)|^2 = H(f)$$

a) $\phi_{gg}(f) = \phi_{ss}(f) \cdot |H(f)|^2 = N_0 \cdot H(f)$

$$= N_0 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

b) $m_g = N_0 H(0) = 0$

$$\mathcal{E}\{g^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{gg}(f) \mathrm{d}f = 2 N_0 f_\Delta$$

$$\sigma_g^2 = \mathcal{E}\{g^2(t)\} - m_g^2 = 2 N_0 f_\Delta$$

c) $\phi_{gg}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ \varphi_{gg}(\tau) = N_0 h(\tau) = N_0 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta \tau) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 \tau)$

d) siehe Aufgabe 7.8

$\varphi_{gs}(\tau) = N_0 h(\tau) = \varphi_{gg}(\tau) = N_0 f_\Delta \mathrm{si}(\pi f_\Delta \tau) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 \tau)$

e) $\varphi_{gf}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi^{\mathrm{E}}_{h_{\mathrm{TP}} h_{\mathrm{BP}}}(\tau)$ nach Aufgabe 7.7a

$$\begin{array}{c}\circ\\ |\\ \bullet\end{array}$$

$\phi_{gf}(f) = N_0 \cdot H^*_{\mathrm{TP}}(f) \cdot H_{\mathrm{BP}}(f) = 0$ (überlappungsfreie Filter!)

$\Rightarrow \varphi_{gf}(\tau) = 0 \Rightarrow \mu_{gf}(\tau) = 0 \Rightarrow g(t)$ und $f(t)$ sind unkorreliert.

Aufgabe 7.10

Rauschbandbreite f_R von Tiefpassfiltern

a) Leistung bei idealem Referenz-Tiefpass

$$\phi_\mathrm{RR}(f) = N_0|H_\mathrm{R}(f)|^2 = N_0 H^2(0)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{R}}\right)$$

$$L_\mathrm{R} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\mathrm{RR}(f)\mathrm{d}f = N_0 H^2(0) \cdot 2f_\mathrm{R}$$

mit L nach (7.38) und $L = L_\mathrm{R}$

$$\Rightarrow f_\mathrm{R} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f / (2H^2(0))$$

b) RC-Tiefpass: $H(f) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f RC}$

$H(0) = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f = 1/(2T) \qquad \text{(s. Abschn. 6.4)}$$

$$\Rightarrow f_\mathrm{R} = \frac{1}{2 \cdot 2T} = \frac{1}{4RC}$$

c) Bandpassfilter:

$$H_{\mathrm{R_{BP}}}(f) = \left[|H(f_0)|\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_{\Delta\mathrm{R}}}\right)\right] * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$L_\mathrm{R} = N_0|H(f_0)|^2 \cdot 2f_{\Delta\mathrm{R}}$$

mit L nach (7.38) und $L = L_\mathrm{R}$

$$\Rightarrow f_{\Delta\mathrm{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f / (2|H(f_0)|^2).$$

Aufgabe 7.11

Differentiator: $H(f) = \mathrm{j}2\pi f$ (s. Abschn. 3.13)

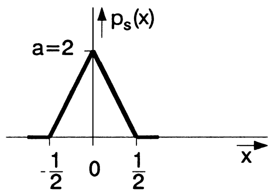
$$\phi_{gg}(f) = |H(f)|^2 \cdot \phi_{ss}(f) = (2\pi f)^2 \cdot \phi_{ss}(f)$$

$$\varphi_{gg}(\tau) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\varphi_{ss}(\tau)$$

Aufgabe 7.12

$p_s(x) = a\Lambda(2x)$

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} p_s(x)\mathrm{d}x = a \cdot \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a = 2$$



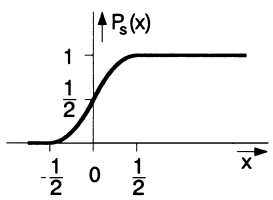
b) $$P_s(x) = \int_{-\infty}^{x} p_s(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} 2\Lambda(2y)\mathrm{d}y$$

$-\infty < x < -\frac{1}{2}$ $\quad P_s(x) = 0$

$-\frac{1}{2} \le x < 0$ $\quad P_s(x) = \int_{-1/2}^{x} p_s(y)\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{x} (4y+2)\mathrm{d}y = 2(x+0{,}5)^2$

$0 \le x < \frac{1}{2}$ $\quad P_s(x) = \frac{1}{2} + \int_{-1/2}^{x} p_s(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \int_{-1/2}^{x} (2-4y)\mathrm{d}y = 1 - 2(x-0{,}5)^2$

$\frac{1}{2} < x < \infty$ $\quad P_s(x) = 1$

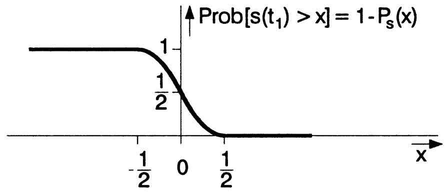


c) $$\mathcal{E}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \text{da } p_s(x) \text{ gerade!}$$

$$\mathcal{E}\{s^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} x^2 p_s(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1/2} x^2(2-4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{24} = \sigma^2$$

d) $\text{Prob}\left[0 < s(t_1) \leq 0{,}3\right] = P_s(0{,}3) - P_s(0) = 0{,}42$

e)



Aufgabe 7.13

$\phi_{ss}(f) = \text{rect}(f) + 2\delta(f) \quad \text{und } \phi_{gg}(f) = \Lambda(f)$

a) $\varphi_{ss}(\tau) = \text{si}(\pi\tau) + 2$

$m_s^2 = \varphi_{ss}(\infty) = 2 \Rightarrow m_s = \pm\sqrt{2}$

$L_s = \varphi_{ss}(0) = 3$

$\sigma_s^2 = L_s - m_s^2 = 1$

$\varphi_{gg}(\tau) = \text{si}^2(\pi\tau)$

$m_g^2 = \varphi_{gg}(\infty) = 0$

$\sigma_g^2 = L_g = \varphi_{gg}(0) = 1, \quad \text{da } m_g = 0$

b) ${}^k f(t) = {}^k g(t) + {}^k s(t)$

$\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{gg}(\tau) + \varphi_{sg}(\tau) + \varphi_{gs}(\tau)$ (s. Aufgabe 7.4)

Da $s(t)$ und $g(t)$ unkorreliert $\Rightarrow \varphi_{gs}(\tau) = \varphi_{sg}(\tau) = m_s \cdot m_g = 0$

[nach (7.89)]
$\Rightarrow L_f = \varphi_{ss}(0) + \varphi_{gg}(0) = L_s + L_g = 4$

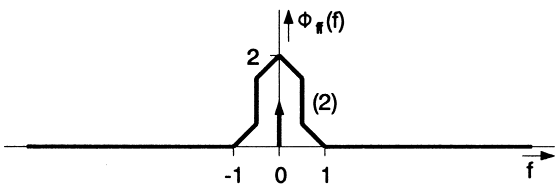
$m_f = m_g + m_s = \pm\sqrt{2}$

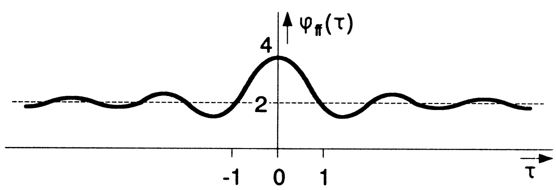
$\sigma_f^2 = L_f - m_f^2 = 2$

$$\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{gg}(\tau) = 2 + \text{si}(\pi\tau) + \text{si}^2(\pi\tau)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

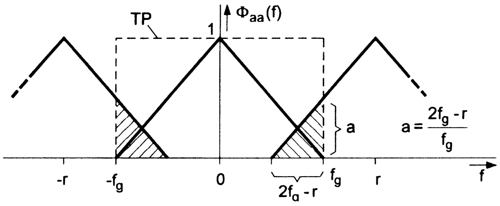
$$\phi_{ff}(f) = \phi_{ss}(f) + \phi_{gg}(f)$$





Aufgabe 7.14

Ohne Berücksichtigung des Abtastamplitudenfaktors gilt für das Leistungsdichtespektrum $\phi_{aa}(f)$ des abgetasteten Signals (s. Abbildung)



im Durchlaßbereich des TP hat das unverzerrte Nutzsignal die Leistung

$$L_s = \int_{-f_\mathrm{g}}^{f_\mathrm{g}} \Lambda(f/f_\mathrm{g})\mathrm{d}f = f_\mathrm{g},$$

die schraffierte Fläche ergibt die Leistung des Abtastfehlersignals

$$L_e = a(2f_\mathrm{g} - r) = \frac{1}{f_\mathrm{g}}(2f_\mathrm{g} - r)^2 \quad \text{für} \quad f_\mathrm{g} < r < 2f_\mathrm{g}$$

damit ist das Leistungsverhältnis

$$\frac{L_e}{L_s} = \begin{cases} (2 - r/f_\mathrm{g})^2 & \text{für} \quad f_\mathrm{g} \leq r \leq 2f_\mathrm{g} \\ 0 & \text{für} \quad r \geq 2f_\mathrm{g} \end{cases}$$

Anmerkung: Die Leistungen L_s und L_e dürfen getrennt berechnet werden, da Nutz- und Abtastfehlersignal aus unterschiedlichen Frequenzbereichen des Eingangssignals stammen und daher unkorreliert sind (vgl. Aufgabe 7.7c)

Aufgabe 7.15

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i(t) \quad n \text{ statistisch unabhängige Gauß-Prozesse } s_i(t)$$

$$\Rightarrow p_s(x) = p_{s_1}(x) * p_{s_2}(x) * \ldots * p_{s_n}(x)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\text{oder } \mathcal{F}\{p_s(x)\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}\{p_{s_i}(x)\}$$

$$p_{s_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp[-(x-m_i)^2/(2\sigma_i^2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \left[\left\{ \exp\left\langle -\pi \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right)^2 \right\rangle \right\} * \delta(x-m_i) \right]$$

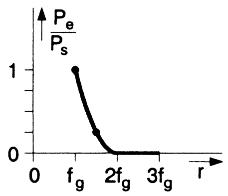
$$\mathcal{F}\{p_{s_i}(x)\} = \exp(-2\pi^2 f^2 \sigma_i^2) \cdot \exp(-\mathrm{j}2\pi f m_i)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{p_s(x)\} = \exp\left(-2\pi^2 f^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right) \exp\left(-\mathrm{j}2\pi f \sum_{i=1}^{n} m_i\right)$$

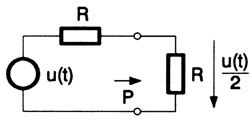
$$p_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_i \sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{x - \sum_i m_i}{2\sum_i \sigma_i^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\left(\frac{x-m}{2\sigma^2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



Aufgabe 7.16

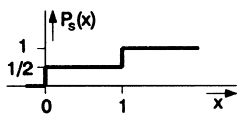


Maximale Leistung bei Anpassung:

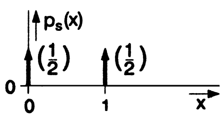
$$L_{\max} = \frac{\mathcal{E}\{^2(t)\}}{4R} = \frac{4kT_{\mathrm{abs}}Rf_{\mathrm{g}}}{4R} = kT_{\mathrm{abs}}f_{\mathrm{g}}$$

Aufgabe 7.17

a) $P_s(x) = \frac{1}{2}[\varepsilon(x) + \varepsilon(x-1)]$



$$p_s(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_s(x) = \frac{1}{2}[\delta(x) + \delta(x-1)]$$



b) $$\overline{s(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x[\delta(x) + \delta(x-1)] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

$$\overline{s^2(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(0-1^2) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_s^2 = \overline{s^2(t)} - \left[\overline{s(t)}\right]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

c) $\varphi_{ss}(\tau) = \overline{s(t)\cdot s(t+\tau)}$

1) für Verschiebungen $|\tau| > T$ sind $s(t)$ und $s(t+\tau)$ unkorreliert
$\Rightarrow \varphi_{ss}(\tau) = \overline{s(t)}\cdot\overline{s(t+\tau)} = m_s^2 = 1/4$

2) für $\tau = 0 \Rightarrow \varphi_{ss}(0) = \overline{s^2(t)} = 1/2$

3) $s(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{d}_n g(t-nT) \quad \text{mit} \quad g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

diskrete AKF der Koeffizienten:

$$\varphi(n) = \overline{d_m d_{m+n}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} d_m d_{m+n}$$

$$= \begin{cases} \overline{d_m^2} = 1/2 & \text{für } n = 0 \\ \left(\overline{d_m}\right)^2 = 1/4 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t = T\cdot\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

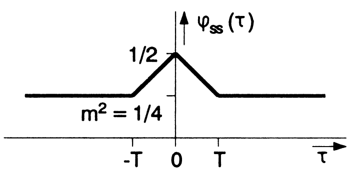
$$\Rightarrow \varphi_{ss}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\varphi(n)\varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(\tau - nT)$$

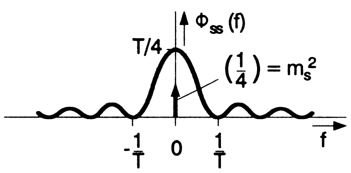
$$= \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n\neq 0}\Lambda\left(\frac{\tau - nT}{T}\right)$$

$$\varphi_{ss}(\tau) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\phi_{ss}(f) = \frac{1}{4}[\delta(f) + T\mathrm{si}^2(\pi f T)]$$

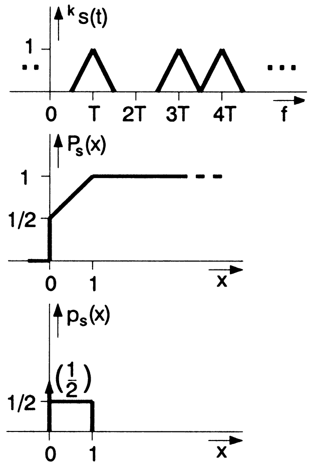




d) $\overline{s(t)} = \pm\sqrt{\varphi_{ss}(\infty)} = \pm\frac{1}{2} = \pm\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\delta(f)\mathrm{d}f}$

$$\overline{s^2(t)} = \varphi_{ss}(0) = \frac{1}{2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{ss}(f)\mathrm{d}f$$

e)



$$P_s(x) = \frac{1}{2}\varepsilon(x) + \left(\left[\frac{1}{2}x \cdot \varepsilon(x)\right] * [\delta(x) - \delta(x-1)]\right)$$
$$p_s(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{s(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_s(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x\delta(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

$$\overline{s^2(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = \overline{s^2(t)} - \left[\overline{s(t)}\right]^2 = \frac{5}{48}$$

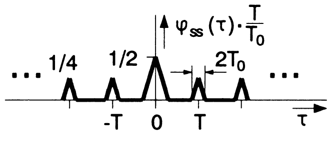
f) nach c) folgt:

$$\varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(\tau) = T_0\Lambda\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \text{ und } \varphi(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

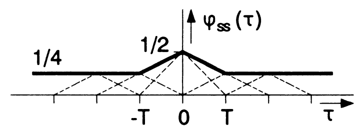
$$\varphi_{ss}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\varphi(n)\varphi_{gg}^{\mathrm{E}}(\tau - nT) = \frac{1}{4}\frac{T_0}{T}\Lambda\left(\frac{\tau}{T_0}\right) + \frac{T_0}{4T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda\left(\frac{\tau - nT}{T_0}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\phi_{ss}(f) = \frac{1}{4}\frac{T_0^2}{T}\mathrm{si}^2(\pi f T_0) + \left(\frac{T_0}{2T}\right)^2 \mathrm{si}^2(\pi f T_0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



$T_0 \ll T$



$T_0 = T$ 0

Aufgabe 7.18

$$\mathcal{E}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(\frac{(x-m_s)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x$$

mit $\tau = \dfrac{x-m_s}{\sqrt{2}\sigma}$, $\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{d}x$, $x = \sqrt{2}\sigma\tau + m_s$ folgt:

$$\mathcal{E}\{s(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma\tau + m_s)\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau \cdot \sqrt{2}\sigma$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tau \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)}_{=0} + \frac{m_s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau = \frac{m_s}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = m_s$$

$$\mathcal{E}\{s^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma\tau + m_s)^2 \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\sqrt{2}\sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2\sigma^2\tau^2\mathrm{e}^{-\tau^2} \underbrace{+2\sqrt{2}m_s\sigma\tau\mathrm{e}^{-\tau^2}}_{\text{ungerade}} + m_s^2\mathrm{e}^{-\tau^2})\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau + \frac{m_s^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau = \sigma^2 + m_s^2$$

Aufgabe 7.19

$$p_{sg}(x,y,\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_g\sqrt{1-\varrho^2(\tau)}} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_g^2x^2 + \sigma_s^2y^2 - 2\sigma_s\sigma_g\varrho(\tau)xy}{2\sigma_s^2\sigma_g^2[1-\varrho^2(\tau)]}\right) \qquad \text{Gl. (7.94)}$$

Hier: $\sigma_s = \sigma_g = \sigma$

$$\varphi_{sg}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp_{sg}(x,y,\tau=0)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad \text{Gl. (7.83)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{sg}(0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\varrho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2-2\varrho xy}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}\right)\mathrm{d}x\right]}_{I}$$

$$\cdot\, y \exp\left(\frac{y^2}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}\right)\mathrm{d}y$$

1) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(\frac{(x-\varrho y)^2}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}\right)\exp\left(\frac{\varrho^2y^2}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}\right)\mathrm{d}x$$

Substitution: $t = \dfrac{x-\varrho y}{\sigma\sqrt{2(1-\varrho^2)}}$, $\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2(1-\varrho^2)}\mathrm{d}t$

$$I = \left[\exp\left(\frac{\varrho^2y^2}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} [t\cdot\sigma\sqrt{2(1-\varrho^2)} + \varrho y]\cdot\exp(-t^2)\sigma\sqrt{2(1-\varrho^2)}\mathrm{d}t$$

$$I = \varrho y\sqrt{\pi}\sigma\sqrt{2(1-\varrho^2)}\exp\left(\frac{\varrho^2y^2}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}\right)$$

2) $$\varphi_{sg}(0) = \frac{\varrho\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\cdot 2 \cdot \sqrt{2}\cdot\sigma^3}{2} = \varrho\sigma^2$$

Aufgabe 7.20

Monotone Transformation einer kontinuierlichen Zufallsvariable

$$s(t_1) = x \to g(t_1) = y = \mathrm{Tr}\{x\} = \frac{x+a}{b}$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion: $x = \mathrm{Tr}^{-1}\{y\} = b \cdot y - a$

Es gilt: $p_g(y) = p_s(\mathrm{Tr}^{-1}\{y\}) \cdot \left|\frac{\mathrm{dTr}^{-1}\{y\}}{\mathrm{d}y}\right|$

hier: $p_g(y) = |b|p_s(by - a)$

$$m_g = \mathcal{E}\{g(t_1)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y p_g(y)\mathrm{d}y = (m_s + a)/b = [\mathcal{E}\{s(t_1)\} + a]/b$$

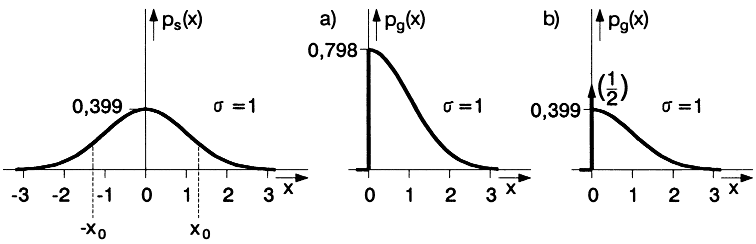
$$L_g = \mathcal{E}\{g^2(t_1)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 p_g(y)\mathrm{d}y = (L_s + 2am_s + a^2)/b^2$$
$$= [\mathcal{E}\{s^2(t_1)\} + 2a \cdot \mathcal{E}\{s(t_1)\} + a^2]/b^2$$

Aufgabe 7.21

Mittelwertfreies Gaußsches Rauschen:

$$p_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

wegen der Symmetrie folgt anschaulich:



allgemeine Lösung auch für nichtsymmetrische Verteilungsdichtefunktionen:

a) $g(t) = |s(t)|$

$$\mathrm{Prob}\{s(t) \le -x_0\} + \mathrm{Prob}\{s(t) > x_0\} \stackrel{!}{=} \mathrm{Prob}\{g(t) > x_0\} \quad \text{für } x_0 \ge 0$$

$$P_s(-x_0) + [1 - P_s(x_0)] = 1 - P_g(x_0)$$

$$P_g(x_0) = P_s(x_0) - P_s(-x_0)$$

$mit x = x_0 \ge 0$ folgt

$$P_g(x) = P_s(x) - P_s(-x)\,, \quad P_g(x) = 0 \quad \text{für } x < 0$$

$$p_g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_g(x) = p_s(x) + p_s(-x)$$

$$\Rightarrow p_g(x) = \varepsilon(x) \cdot [p_s(x) + p_s(-x)]$$

b) $g(t) = \frac{1}{2}[s(t) + |s(t)|]$

$$\Rightarrow P_g(x) = \varepsilon(x) \cdot P_s(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_g(x) = p_g(x) = \delta(x) \cdot P_s(x) + \varepsilon(x) \cdot p_s(x)$$

$$= P_s(0)\delta(x) + \varepsilon(x) \cdot p_s(x)$$

$$p_g(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \varepsilon(x) \cdot p_s(x)$$

Aufgabe 7.22

$$h(t) = \exp(-\pi t^2)$$

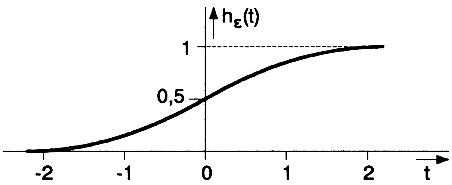
$$h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\pi\tau^2)\mathrm{d}\tau$$

Substitution: $\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x$; $\quad \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x$

$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp(-x^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \mathrm{erf}(t\sqrt{\pi})] = \frac{1}{2}[1 - \mathrm{erf}(-t\sqrt{\pi})] = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(-t\sqrt{\pi})$$



0

Aufgabe 7.23

a) mit (7.63) $\Rightarrow s_\mathrm{b}(t) \geq 0\,,\qquad$ da $s^2(t) \geq 0$ und $E > 0$

mit (7.64) $\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_\mathrm{b}(t)\mathrm{d}t = 1\,,\quad$ da $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t$ laut Definition von E

b) $$\sigma_t = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot s_\mathrm{b}(t)\mathrm{d}t - \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot s_\mathrm{b}(t)\mathrm{d}t \right]^2 \right\}^{1/2}$$

analog zu $\sigma_s = (L_s - m_s^2)^{1/2}$

c) $s(t) = \mathrm{rect}(t)$ und $g(t) = -\mathrm{sgn}(t) \cdot \mathrm{rect}(t)$

$\Rightarrow s_\mathrm{b} = s^2(t) = g^2(t)$

$$\Rightarrow \sigma_\mathrm{b} = \left[\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^2\mathrm{d}t - \left(\int\limits_{-1/2}^{1/2} t\mathrm{d}t \right)^2 \right]^{1/2} = 1/\sqrt{12}$$

d) Analog: $S_\mathrm{b}(f) = |S(f)|^2/E \quad$ Beachte: $S_\mathrm{b}(f) \neq \mathcal{F}\{s_\mathrm{b}(t)\}$

$$\sigma_f = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot S_\mathrm{b}(f)\mathrm{d}f - \underbrace{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f \cdot S_\mathrm{b}(f)\mathrm{d}f \right]^2}_{=0,\text{ da } S_\mathrm{b}(f) \text{ gerade}} \right\}^{1/2}$$

$$= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot S_\mathrm{b}(f)\mathrm{d}f \right]^{1/2}$$

Aufgabe 7.24

a) $s(n)$ und $g(n)$ sind unkorreliert; $g(n)$ ist mittelwertfrei
$\Rightarrow \mu_{sg}(m) = 0;\;$ mit $\mu_{sg}(m) = \varphi_{sg}(m) - m_s \cdot m_g$
$\Rightarrow \varphi_{sg}(m) = m_s \cdot m_g$
$\mathcal{E}\{p(n)\} = \mathcal{E}\{(n) \cdot g(n)\} = \varphi_{sg}(0) = 0$ wegen $m_g = 0$

b) erneute synchrone Multiplikation mit der gleichen Pseudonoisefolge $g(n)$
$p(n) \cdot g(n) = s(n) \cdot g^2(n) = s(n)$

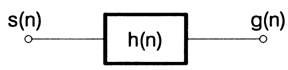
Aufgabe 7.25

Leistung $L_g = \varphi_{gg}(0) = [\varphi_{ss}(m) * \varphi_{hh}^\mathrm{E}(m)]_{m=0}$

$= [\sigma_n^2\delta(m) * \varphi_{hh}^\mathrm{E}(m)]_{m=0} = \sigma_n^2\varphi_{hh}^\mathrm{E}(0)$

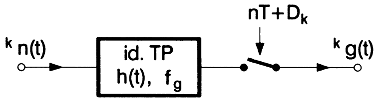
$= \sigma_n^2 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) < \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) \overset{!}{<} \infty$

mit „Wiener-Lee-Beziehung“



Aufgabe 7.26

„Abtastmodell“ für eine Musterfunktion



wobei D_k = gleichverteilte Zufallsgröße im Bereich $[0; T]$ und statistisch unabhängig von $n(t)$ mit

$$^k g(t) = [^k n(t) * h(t)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT - D_k)$$

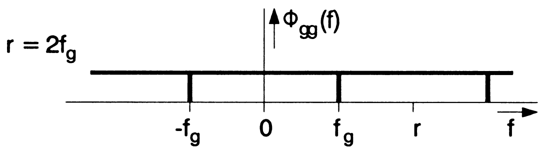
$$\Rightarrow \varphi_{gg}(\tau) = [\varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^{\mathrm{E}}(\tau)] \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) \quad \text{bzw.}$$

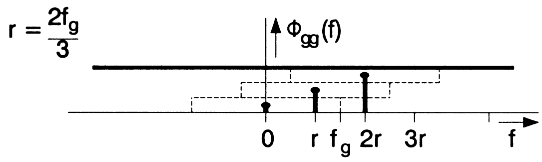
$$\phi_{gg}(f) = N_0 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{\mathrm{g}}}\right) * \left[\frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right]$$

$$\phi_{gg}(f) \overset{!}{=} \text{const. für } r = \frac{1}{T} = \frac{2f_{\mathrm{g}}}{n}, \quad n = \text{ganzahlig}$$

und damit ist $^k g(t)$ Musterfunktion von zeitdiskretem, weißen Rauschen.

Beispiel:





Aufgabe 7.27

$$\varphi_{gg}(n) = \mathcal{E}\{g(n) \cdot g(n+m)\}$$

$$= \mathcal{E}\{\sum_{\Theta=-\infty}^{\infty} s(n-\Theta)h(\Theta) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s(n+m-\mu)h(\mu)\}$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\Theta=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\{s(n-\Theta)s(n+m-\mu)\}h(\Theta)h(\mu)$$

$$= \sum_{\mu} \sum_{\Theta} \varphi_{ss}(m - \mu + \Theta)h(\mu)h(\Theta)$$

Substitution:

$$\nu = \mu - \Theta$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{\Theta} \varphi_{ss}(m-\nu)h(\Theta)h(\nu+\Theta) = \sum_{\nu} \varphi_{ss}(m-\nu)\varphi_{hh}^{\mathrm{E}}(\nu)$$

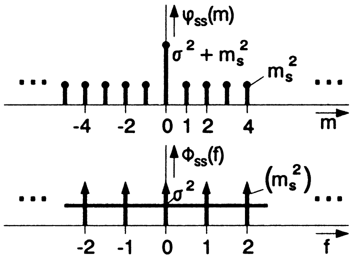
$$= \varphi_{ss}(m) * \varphi_{hh}^{\mathrm{E}}(m)$$

Aufgabe 7.28

Zeitdiskretes Rauschen, weiß, aber nicht mittelwertfrei

$$\varphi_{ss}(m) = \sigma^2\delta(m) + m_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(m-n)$$

$$\phi_{ss}(f) = \sigma^2 + m_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$$



Gleichverteiltes Rauschen (nach Abb. 7.17)

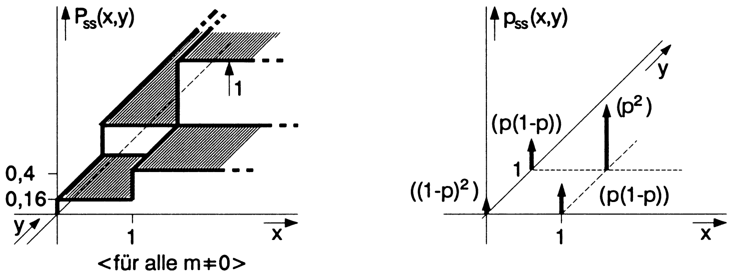
$a = 1,\ m_s = a/2 = 1/2$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{a^2}{12} = \frac{1}{12}\ ; \quad m_s^2 = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 7.29

a)

b) $P_{ss}(x, y, m \neq 0) = P_s(x) \cdot P_s(y)$, da statistisch unabhängig bzw. $p_{ss}(x, y, m \neq 0) = p_s(x) \cdot p_s(y)$

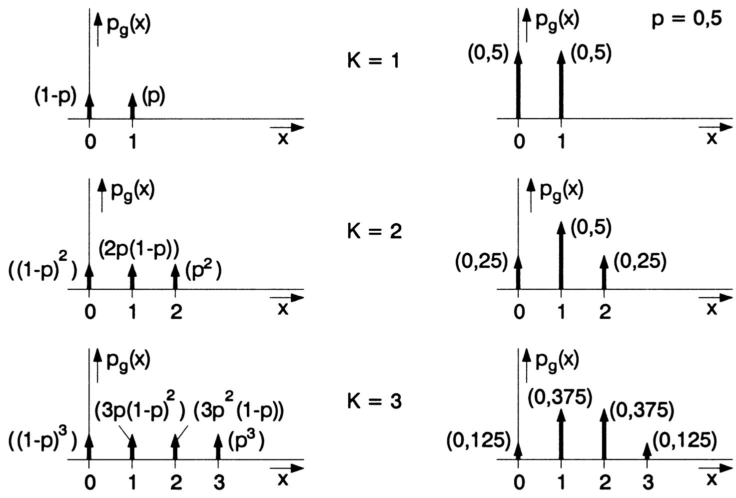


c) $\varphi_{ss}(m) = \mathcal{E}\{s(n) \cdot s(n+m)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyp_{ss}(x, y, m \neq 0)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$$= p^2 = 0{,}36$$

d) $p_g(x) = \underbrace{p_s(x) * p_s(x) \ldots * p_s(x)}_{K}$

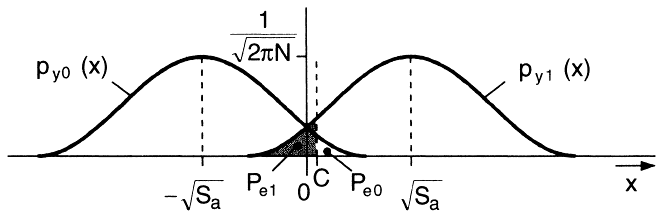
$$= \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} p^i (1-p)^{K-i} \delta(x-i) \quad \text{(Binomialverteilung)}$$



$K \to \infty$: Poisson-Verteilung

Aufgabe 7.30

a)



b) $P_e = P_1 \cdot P_{e1} + (1 - P_1) \cdot P_{e0}$

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^{C} p_{y1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{S_\mathrm{a}} - C}{\sqrt{2N}}\right) \qquad \big(\text{wie bei unipolarer Übertragung (7.101)}\big)$$

c) $$P_{e0} = \int_{C}^{\infty} p_{y0}(x)\mathrm{d}x = \int_{C}^{\infty} p_{y1}(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-C} p_{y1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{S_\mathrm{a}} + C}{\sqrt{2N}}\right)$$

d) mit $a = \sqrt{\dfrac{S_\mathrm{a}}{2N}}$ und $x = \dfrac{C}{\sqrt{2N}}$ folgt:

$$P_e = \frac{P_1}{2}\,\mathrm{erfc}(a - x) + \frac{1 - P_1}{2}\,\mathrm{erfc}(a + x)$$

mit (7.157) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}x} = \frac{P_1}{2} \cdot \frac{+2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(a-x)^2} + \frac{1 - P_1}{2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(a+x)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - P_1}{P_1} = \mathrm{e}^{-(a-x)^2 + (a+x)^2} = \mathrm{e}^{4ax} \Rightarrow x = \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{1 - P_1}{P_1}\right) \qquad \text{und}$$

$$C = \frac{N}{2\sqrt{S_\mathrm{a}}}\ln\left(\frac{1 - P_1}{P_1}\right)$$

e) mit $\dfrac{S_\mathrm{a}}{N} = \dfrac{E}{N_0}$ und $N = E \cdot N_0$ folgt

$$C = \frac{N_0}{2} \ln \left(\frac{1 - P_1}{P_1} \right) .$$

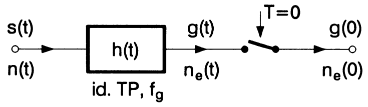
Zu Kapitel 8

Aufgabe 8.1

a) $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \mathrm{d}f$ „Parsevalsches Theorem“

$s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \mathrm{rect}[f/(2f_{\mathrm{g}_0})]$

$\Rightarrow E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}[f/(2f_{\mathrm{g}_0})]\mathrm{d}f = 2f_{\mathrm{g}_0}$

b) 

Korrelationsfilter: $h(t) = s(-t)$ idealer Tiefpass, $f_{\mathrm{g}} = f_{\mathrm{g}_0}$

$S_{\mathrm{a}} = g^2(0)$

mit $g(t) = s(t) * s(-t) = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(t)$

$\Rightarrow S_{\mathrm{a}} = [\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0)]^2 = E^2 = (2f_{\mathrm{g}_0})^2$

$\Rightarrow N = N_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f = N_0 \cdot 2f_{\mathrm{g}_0}$

$\frac{S_{\mathrm{a}}}{N} = \frac{E}{N_0} = \frac{2f_{\mathrm{g}_0}}{N_0}$

c) 1) $f_{\mathrm{g}} < f_{\mathrm{g}_0}$

$G(f) = S(f) \cdot H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{\mathrm{g}}}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\, g(t) = 2f_{\mathrm{g}}\mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}} t)$

$\Rightarrow g(0) = 2f_{\mathrm{g}}$ und $S_{\mathrm{a}} = g^2(0) = (2f_{\mathrm{g}})^2$

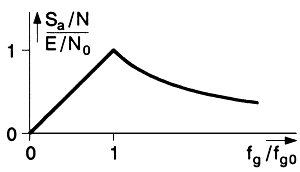
$N = N_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f = N_0 \cdot 2f_{\mathrm{g}}$

$\Rightarrow \frac{S_{\mathrm{a}}/N}{E/N_0} = \frac{2f_{\mathrm{g}} \cdot N_0}{N_0 \cdot 2f_{\mathrm{g}_0}} = \frac{f_{\mathrm{g}}}{f_{\mathrm{g}_0}}$

2) $f_{\mathrm{g}} > f_{\mathrm{g}_0}$

$S_{\mathrm{a}} = (2f_{\mathrm{g}_0})^2$ und $N = N_0 \cdot 2f_{\mathrm{g}}$

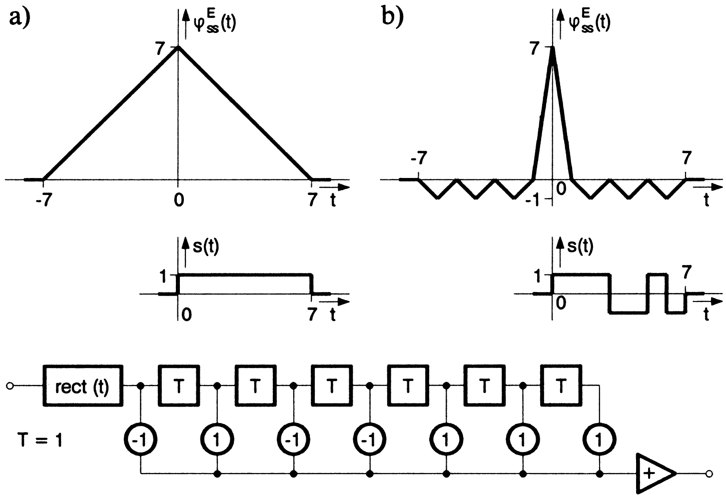
$\Rightarrow \frac{S_{\mathrm{a}}/N}{E/N_0} = \frac{(2f_{\mathrm{g}_0})^2 \cdot N_0}{N_0 \cdot 2f_{\mathrm{g}} \cdot 2f_{\mathrm{g}_0}} = \frac{f_{\mathrm{g}_0}}{f_{\mathrm{g}}}$



Aufgabe 8.2

$s(t) = \sum_{n=0}^{6} s(n)\mathrm{rect}(t-n)$

$\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(t) = s(t) * s(-t)$ mit Papierstreifenmethode folgt:



Aufgabe 8.3

Fehlerwahrscheinlichkeit bei bipolarer Übertragung:

$$L_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) \overset{!}{<} 10^{-4};$$

mit Tabelle 7.1 folgt:

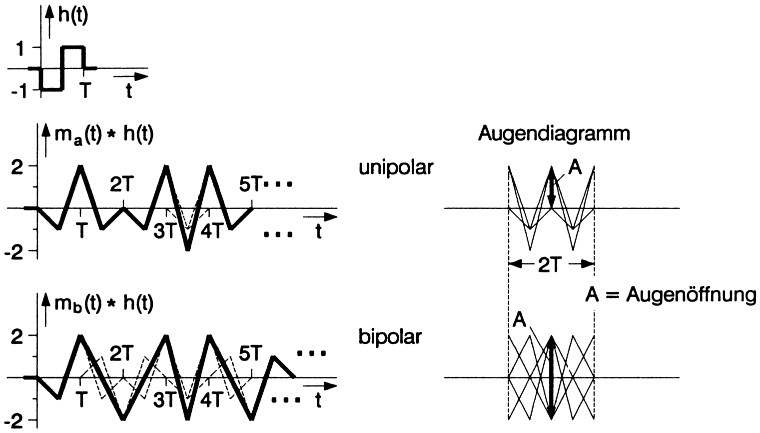
$$\sqrt{\frac{E}{2N_0}} > 2{,}6 \Rightarrow E > 13{,}5 N_0 = 13{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V}^2\,\mathrm{s}$$

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T t^2 \mathrm{d}t\mathrm{V}^2 = \frac{T}{3}\,\mathrm{V}^2$$

$$\Rightarrow T = 3E \approx 40{,}5\,\mu\mathrm{s}$$

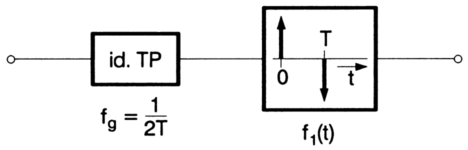
Aufgabe 8.4

Korrelationsfilter:



Aufgabe 8.5

Sender:



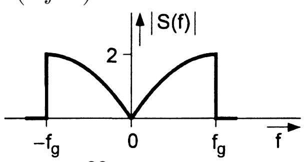
a) $s(t) = [2f_\mathrm{g}\mathrm{si}(2\pi f_\mathrm{g} t)] * [\delta(t) - \delta(t-T)]$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right) \cdot [1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}]$$

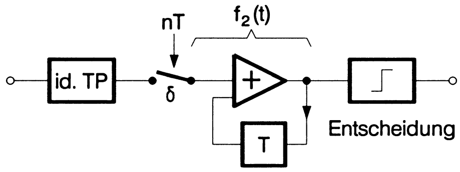
$$= 2\mathrm{j}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right) \sin(\pi fT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT}$$

mit $T = \dfrac{1}{2f_\mathrm{g}} \Rightarrow$



b) $f_1(t) * f_2(t) \stackrel{!}{=} \delta(t) \Rightarrow f_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

Empfänger:



Aufgabe 8.6

a) für alle Walsh-Funktionen gilt: $E = a^2 \cdot T$

b) sin-cos-Impulsfunktionen:

$$E_1 = 2a^2 \int_0^T \cos^2(2\pi f_1 t)\mathrm{d}t = 2a^2 \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{8\pi f_1}\sin(4\pi f_1 T)\right]$$

bzw.

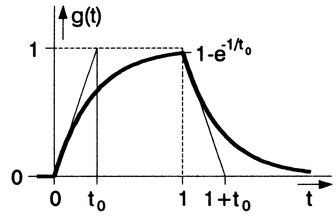
$$E_2 = 2a^2 \int_0^T \sin^2(2\pi f_1 t)\mathrm{d}t = 2a^2 \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{8\pi f_1}\sin(4\pi f_1 T)\right]$$

mit $f_1 = \dfrac{n}{T} \Rightarrow E_1 = E_2 = a^2 \cdot T$

Aufgabe 8.7

a) nach Kapitel 1.6 folgt mit $g_1(t) = \varepsilon(t)(1 - \mathrm{e}^{-t/t_0})$

$g(t) = g_1(t) - g_1(t-1)$



$g(t)$ maximal für $t = 1$

b) $S_\mathrm{a} = g^2(1) = (1 - \mathrm{e}^{-1/t_0})^2$

$$N = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)^2 \mathrm{d}f = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} [1 + (2\pi f t_0)^2]^{-1}\mathrm{d}f = \frac{N_0}{2t_0}$$

$$\frac{S_\mathrm{a}}{N} = \frac{2t_0}{N_0}(1 - \mathrm{e}^{-1/t_0})^2 \ ,$$

c) mit der Produktregel folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\left(\frac{S_\mathrm{a}}{N}\right) = \frac{2}{N_0}(1 - \mathrm{e}^{-1/t_0}) \cdot \left[(1 - \mathrm{e}^{-1/t_0}) - \frac{2}{t_0}\mathrm{e}^{-1/t_0}\right] \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow t_0 \approx 0{,}8$, und mit $E = 1$

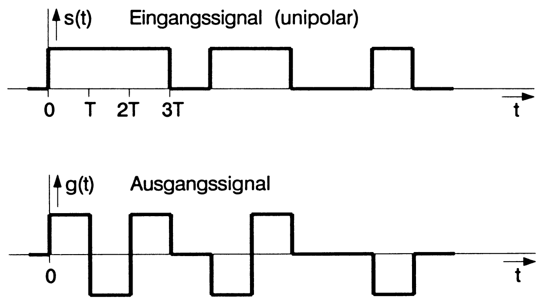
$$\Rightarrow \frac{S_\mathrm{a}/N}{E/N_0} = 2t_0(1 - \mathrm{e}^{-1/t_0})^2 \approx 0{,}814 \,\widehat{=}\, -0{,}89 \text{ dB}$$

Aufgabe 8.8

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 6.23 gilt:

$$\varphi^\mathrm{E}_{h_1h_1}(0) = \varphi^\mathrm{E}_{h_1h_{1_\mathrm{T}}}(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h_\mathrm{T}(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H_\mathrm{T}(f)|^2\mathrm{d}f = 2f_\Delta$$

Aufgabe 8.9



Eigenschaften: −0 bleibt erhalten
−1 wechselt alternierend das Vorzeichen (Alternate Mark Inversion)
⇒ Ausgangsfolge mittelwertfrei!
Rückgewinnung durch Betragsbildung

Aufgabe 8.10

$L_{e0} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{C}{\sqrt{2N}}\right)$ (7.104) , mit $C = \sqrt{S_a}$ folgt:

$$L_{e0} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{S_a}{2N}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{28{,}84}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(3{,}8) \approx 3{,}85 \cdot 10^{-8}$$

$$L_{e1} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{S_a} - C}{\sqrt{2N}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(0) = 0{,}5$$

Zu unsymmetrischen Entscheidungen: s. Aufgabe 7.30.
Unsymmetrische Entscheidungen finden weiter dort Anwendungen, wo Fehlentscheidungen sehr teuer werden können (z.B. Feuermelder)

Normalfall: $C = \sqrt{S_a}/2 \Rightarrow L_{e_{min}} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E}{8N_0}} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ (7.106)

Zu Kapitel 9

Aufgabe 9.1

$h(t) = \mathrm{Re}\{h_\mathrm{T}(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\} = ks(T-t) = \mathrm{Re}\big\{ks_\mathrm{T}(T-t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0(T-t)}\big\}$

mit $\mathrm{Re}\{z\} = \mathrm{Re}\{z^*\}$ folgt:

$h(t) = \mathrm{Re}\big\{ks_\mathrm{T}^*(T-t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0(t-T)}\big\} = \mathrm{Re}\big\{\mathrm{T}^*(T-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0 T} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\big\}$

$\Rightarrow h_\mathrm{T}(t) = ks_\mathrm{T}^*(T-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0 T}$

Aufgabe 9.2

$s(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{für} \quad f_0 \gg \dfrac{1}{T}$

$\Rightarrow s_\mathrm{T}(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{T}\right) = \text{reell}$

$$s(t-t_0) = \mathrm{Re}\big\{s_\mathrm{T}(t-t_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0(t-t_0)}\big\} = \mathrm{Re}\big\{\underbrace{s_\mathrm{T}(t-t_0) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0 t_0}}_{s_\mathrm{Tv}(t)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\big\}$$

$$s_\mathrm{Tv}(t) = \underbrace{s_\mathrm{T}(t-t_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t_0)}_{s_\mathrm{Tr}(t)} - \mathrm{j}\underbrace{s_\mathrm{T}(t-t_0) \cdot \sin(2\pi f_0 t_0)}_{-s_\mathrm{Ti}(t)}$$

$$\begin{aligned}
g_\mathrm{Tr}(t) &= \frac{1}{2}\big[s_\mathrm{Tr}(t) * s_\mathrm{T}(-t)\big] = \frac{1}{2}\big[s_\mathrm{T}(t-t_0) * s_\mathrm{T}(-t)\big] \cdot \cos(2\pi f_0 t_0) \\
&= \varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0)\cos(2\pi f_0 t_0) \\
g_\mathrm{Ti}(t) &= \frac{1}{2}\big[s_\mathrm{Ti}(t) * s_\mathrm{T}(-t)\big] = -\frac{1}{2}\big[s_\mathrm{T}(t-t_0) * s_\mathrm{T}(-t)\big] \cdot \sin(2\pi f_0 t_0) \\
&= -\varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0)\sin(2\pi f_0 t_0)
\end{aligned}$$

Addierschaltung:

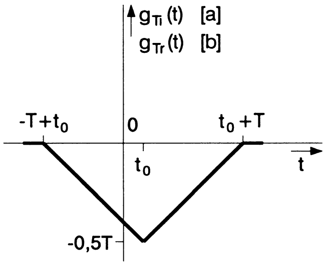
$$\begin{aligned}
g(t) &= g_\mathrm{Tr}(t)\cos(2\pi f_0 t) - g_\mathrm{Ti}(t)\sin(2\pi f_0 t) \\
&= \varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0)\big[\cos(2\pi f_0 t_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \sin(2\pi f_0 t_0) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\big] \\
&= \varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0)\cos\big[2\pi f_0(t-t_0)\big]
\end{aligned}$$

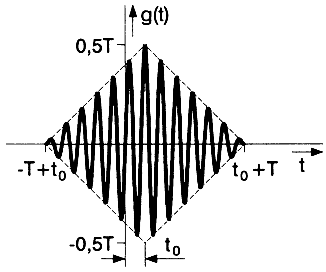
a) $2\pi f_0 t_0 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow g_\mathrm{Tr}(t) = 0\,, \quad g_\mathrm{Ti}(t) = -\varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0)$

$\Rightarrow g(t) = \varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$

b) $2\pi f_0 t_0 = \pi \Rightarrow g_\mathrm{Ti}(t) = 0\,, \quad g_\mathrm{Tr}(t) = -\varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0)$

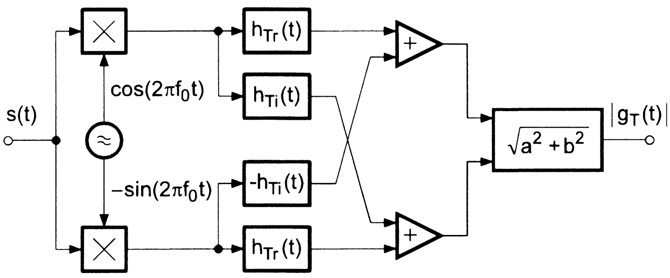
$\Rightarrow g(t) = -\varphi_{ss_\mathrm{T}}^\mathrm{E}(t-t_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$



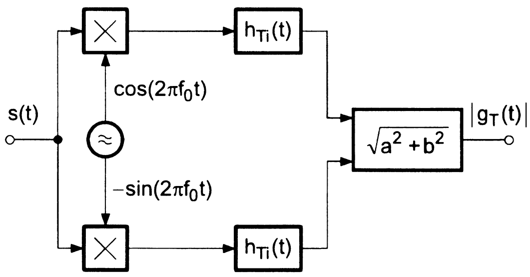


Aufgabe 9.3

Hüllkurvenempfänger für nichtsymmetrisches BP-Trägersignal



Hüllkurvenempfänger für Trägersignal mit rein imaginärer Hüllkurve



Aufgabe 9.4

Signal: $s(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\right\}$

Filter: $h(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\Delta f t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\right\}$

Ausgangssignal: $g(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}[s_\mathrm{T}(t) * h_\mathrm{T}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\right\}$

$$\Rightarrow g_\mathrm{T}(t) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] * \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\Delta f t}\right]$$

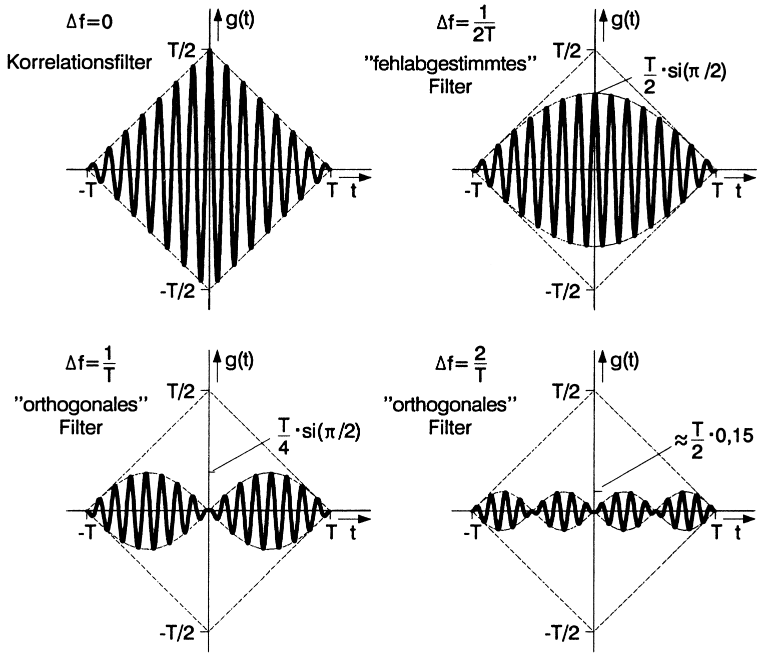
für $|t| > T \Rightarrow g_\mathrm{T}(t) = 0$

$$-T < t \leq 0 \Rightarrow g_\mathrm{T}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-T/2}^{t+T/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\Delta f\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\sin[\pi\Delta f(t+T)]}{2\pi\Delta f}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\Delta f t}$$

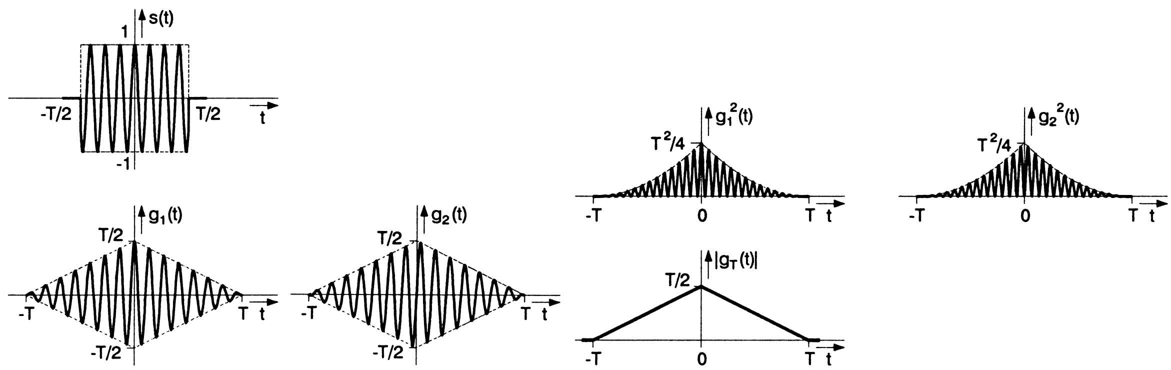
$$0 < t \leq T \Rightarrow g_\mathrm{T}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\Delta f\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\sin[\pi\Delta f(T-t)]}{2\pi\Delta f}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\Delta f t}$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\frac{T}{2}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\cdot \mathrm{si}[\pi\Delta f(T-|t|)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\Delta f t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\right\}$$

$$g(t) = \frac{T}{2}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{si}[\pi\Delta f(T-|t|)]\cos\left[2\pi t\left(f_0+\frac{\Delta f}{2}\right)\right]$$



Aufgabe 9.5



Aufgabe 9.6

$h_{1_\mathrm{T}}(t) = s_\mathrm{T}(-t)$ und $h_{2_\mathrm{T}}(t) = -\mathrm{j}s_\mathrm{T}(-t)$ mit $s_\mathrm{T}(t) =$ reell

mit

$\varphi^\mathrm{E}_{hh_\mathrm{T}}(\tau) = \dfrac{1}{2}h^*_\mathrm{T}(-\tau) * h_\mathrm{T}(\tau)$ folgt:

$\varphi^\mathrm{E}_{h_1h_{1_\mathrm{T}}}(\tau) = \dfrac{1}{2}s_\mathrm{T}(\tau) * s_\mathrm{T}(-\tau) = \varphi^\mathrm{E}_{ss_\mathrm{T}}(\tau) = \text{reell}$

$\varphi^\mathrm{E}_{h_2h_{2_\mathrm{T}}}(\tau) = \dfrac{1}{2}[\mathrm{j}s_\mathrm{T}(\tau)] * [-\mathrm{j}s_\mathrm{T}(-\tau)] = \varphi^\mathrm{E}_{ss_\mathrm{T}}(\tau) = \text{reell}$

$$\begin{aligned}\varphi^\mathrm{E}_{hh}(\tau) &= \mathrm{Re}\{\varphi^\mathrm{E}_{hh_\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0\tau}\} = \varphi^\mathrm{E}_{h_1h_2}(\tau) = \varphi^\mathrm{E}_{h_2h_2}(\tau)\\ &= \varphi^\mathrm{E}_{ss_\mathrm{T}}(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\end{aligned}$$

Aufgabe 9.7

Rayleigh-Verteilungsdichtefunktion:

$$p_s(x) = \varepsilon(x)\frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \qquad \text{Gl. (9.27)}$$

$$P_s(x) = \int_{-\infty}^{x} p_s(y)\mathrm{d}y = \varepsilon(x)(1-\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2})$$

$$m_\mathrm{R} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_s(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$\mathcal{E}\{s^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x = 2\sigma^2$$

$$\sigma_\mathrm{R}^2 = \mathcal{E}\{s^2(t)\} - m_\mathrm{R}^2 = \sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_s(x) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} + x\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\cdot\left(-\frac{2x}{2\sigma^2}\right)\right] \overset{!}{=} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$\Rightarrow x = \sigma \Rightarrow p_s(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx \frac{0{,}607}{\sigma} \qquad \text{Maximalwert}$$

Aufgabe 9.8

$$d_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{S_\mathrm{a}}{2}}\,;N_\mathrm{d} = 2 \qquad \text{für alle Punkte}$$

$$P_\mathrm{e} \approx \frac{N_\mathrm{d}}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{(d_\mathrm{min})^2}{S_\mathrm{a}}\frac{\tilde{E}_s}{8N_0}}\right)$$
$$= \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\tilde{E}_s}{16N_0}}\right)$$

$\tilde{E}_s$: Symbolenergie der vier äußeren Punkte.

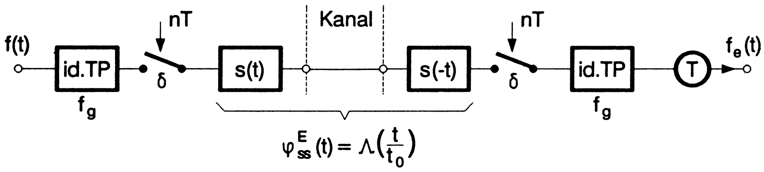
Energie pro bit, K = 3.

$$E_b = \frac{1}{K}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left[4\cdot\left(\sqrt{S_\mathrm{a}}\right)^2 + 4\cdot\left(\sqrt{\frac{S_\mathrm{a}}{2}}\right)^2\right]\frac{\tilde{E}_s}{\left(\sqrt{S_\mathrm{a}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\tilde{E}_s$$
$$\Rightarrow P_\mathrm{b} \approx \frac{1}{3}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{4N_0}}\right)$$

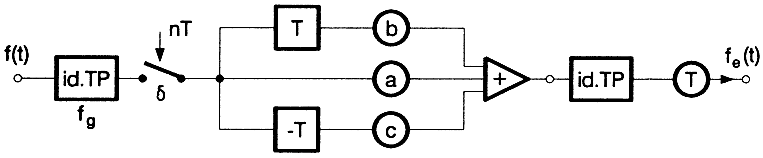
Zu Kapitel 10

Aufgabe 10.1

PAM-Übertragungssystem mit $s(t) = \mathrm{rect}(t/t_0)/\sqrt{t_0}$



mit $T < t_0 < 2T$ und $T = \dfrac{1}{2f_{\mathrm{g}}}$ folgt ein Ersatzmodell:



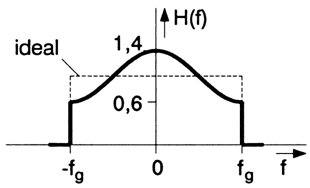
mit $a = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(0) = 1$, $\quad b = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(T) = \dfrac{t_0 - T}{t_0}, \quad c = \varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(-T) = b$

Nach Vertauschung der Reihenfolge der LTI-Systeme und Zusammenfassung von Tiefpass, Abtaster und Tiefpass zu einem idealen Tiefpass (s. Abb. 4.7) folgt:

$$h(t) = \left[a\delta(t) + b\delta(t-T) + b\delta(t-T)\right] * \left[2f_{\mathrm{g}}\mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}} t)\right]$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{\mathrm{g}}}\right) \cdot \left[1 + 2b\cos(2\pi f T)\right] \quad \text{mit} \quad b = \frac{t_0 - T}{t_0}$$



mit $T = 125\,\mu\mathrm{s} \Rightarrow f_{\mathrm{g}} = 4\,\mathrm{kHz}$

$b = 0{,}2$

$\Rightarrow$ Höhenabfall bei Eigeninterferenzen

Aufgabe 10.2

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{e}}(t) &= \Big\{ f(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos\left[2\pi f_0 t - \varphi(t)\right] \Big\} * \left[2f_{\mathrm{g}}\mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}} t)\right] \\ &= \left(f(t) \cdot \frac{1}{2}\Big\{ \cos\left[\varphi(t)\right] + \cos\left[4\pi f_0 t - \varphi(t)\right] \Big\} \right) * \left[2f_{\mathrm{g}}\mathrm{si}(2\pi f_{\mathrm{g}} t)\right] \end{aligned}$$

wegen $f_{\mathrm{g}} \ll f_0 \Rightarrow f_{\mathrm{e}}(t) = \dfrac{1}{2} f(t) \cos\left[\varphi(t)\right]$

a) $f_{\mathrm{e}}(t) = \dfrac{1}{2} f(t) \cos(\varphi_0)$

b) $f_{\mathrm{e}}(t) = \dfrac{1}{2} f(t) \cos(2\pi \Delta f t)$

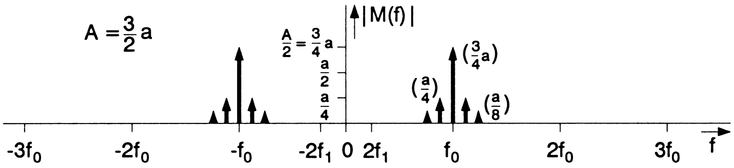
Aufgabe 10.3

$f(t) = a\cos(2\pi f_1 f) + \frac{a}{2}\cos(4\pi f_1 t + \varphi) \quad (\varphi \text{ beliebig})$

a) $f(t) + A \geq 0 \Rightarrow A \geq 1{,}5a \Rightarrow a/A \leq 2/3$

$$m(t) = \big[f(t) + A\big] \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$M(f) = \big[F(f) + A\delta(f)\big] * \left[\frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0)\right]$$

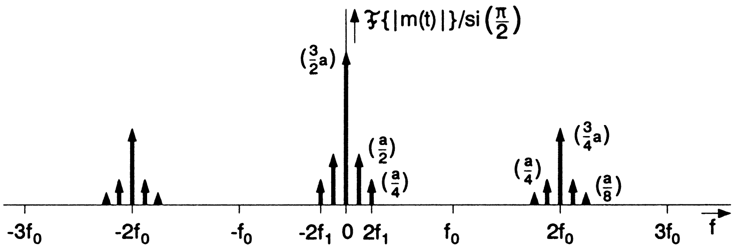


b) $$|m(t)| = \big[f(t) + A\big] \cdot |\cos(2\pi f_0 t)|$$

$$= m(t) \cdot \left\{\left[\Big(2\mathrm{rect}(2f_0 t)\Big) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_0}\right)\right] - 1\right\}$$

$$\mathcal{F}\big\{|m(t)|\big\} = M(f) * \left[\mathrm{si}\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) - \delta(f)\right]$$

$$= M(f) * \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{si}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\delta(f - nf_0)$$



Aufgabe 10.4

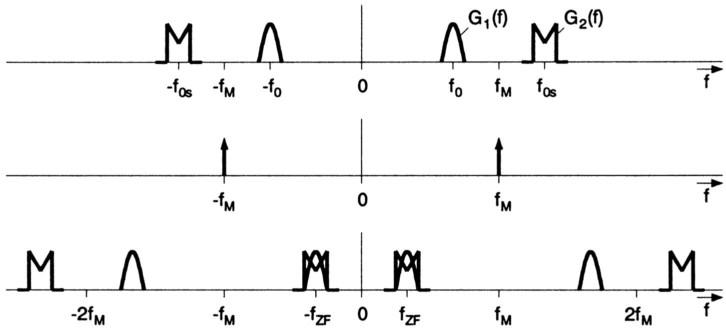
a) $$g(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_{\mathrm{M}} t)$$

$$= f(t) \cdot \frac{1}{2}\Big\{\cos\big[2\pi(f_0 - f_{\mathrm{M}})t\big] + \cos\big[2\pi(f_0 + f_{\mathrm{M}})t\big]\Big\}$$

$\Rightarrow f_{\mathrm{ZF}} = |f_0 \pm f_{\mathrm{M}}|$ ZF-Bereich zunächst tiefer als Nutzsignalbereich

b) $g_1(t) = f_1(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G_1(f)$,

$g_2(t) = f_2(t) \cdot \cos(2\pi f_{0s} t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G_2(f)$



Spiegelfrequenz $f_{0s} = |f_{\mathrm{ZF}} \pm f_{\mathrm{M}}|$
Unterdrückung des Spiegelfrequenzsignals durch Bandpaß am Empfängereingang.

c) Mittelwellenbereich: $0{,}5\,\mathrm{MHz} < f_0 < 1{,}5\,\mathrm{MHz}$
Annahme: $f_{\mathrm{M}} > f_0$

$$\Rightarrow f_{0\mathrm{min}} + 2f_{\mathrm{ZF}} \geq f_{0\mathrm{max}} \Rightarrow f_{\mathrm{ZF_{min}}} \geq \frac{f_{0\mathrm{max}} - f_{0\mathrm{min}}}{2} = 0{,}5\,\mathrm{MHz}$$

UKW-Bereich: $88\,\mathrm{MHz} < f_0 < 108\,\mathrm{MHz}$ (US-Norm)

$$\Rightarrow f_{\mathrm{ZF_{min}}} \geq \frac{f_{0\mathrm{max}} - f_{0\mathrm{min}}}{2} = 10\ \mathrm{MHz}$$

d) Mittelwellenbereich:

$f_{\mathrm{M}} > f_0:\ 1\,\mathrm{MHz} < f_{\mathrm{M}} < 2\,\mathrm{MHz} \mathrel{\widehat{=}} (f_{0\mathrm{min}} + f_{\mathrm{ZF}}) < f_{\mathrm{M}} < (f_{0\mathrm{max}} + f_{\mathrm{ZF}})$

$f_{\mathrm{M}} < f_0:\ 0\,\mathrm{MHz} < f_{\mathrm{M}} < 1\,\mathrm{MHz} \mathrel{\widehat{=}} (f_{0\mathrm{min}} - f_{\mathrm{ZF}}) < f_{\mathrm{M}} < (f_{0\mathrm{max}} - f_{\mathrm{ZF}})$

UKW-Bereich:

$f_{\mathrm{M}} > f_0:\ 98\,\mathrm{MHz} < f_{\mathrm{M}} < 118\,\mathrm{MHz}$

$f_{\mathrm{M}} < f_0:\ 78\,\mathrm{MHz} < f_{\mathrm{M}} < 98\,\mathrm{MHz}$

e) ZF-Filter: $f_\Delta = 10\,\mathrm{kHz}$ Tiefpass: $f_{\mathrm{g}} = 5\,\mathrm{kHz}$

Eingangsbandpaß: $f_\Delta = 10\,\mathrm{kHz}$ (MW) bei variabler Mittenfrequenz

f) $f_1 = 1{,}5\,\mathrm{MHz}$, $f_2 = 0{,}5\,\mathrm{MHz} + f_{\mathrm{ZF}} = 3{,}7\,\mathrm{MHz}$.

Aufgabe 10.5

a) $$H(f) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,(f) = \left\{ \begin{array}{lll} \exp(-j\pi/2) & \text{für} & f > 0 \\ \exp(j\pi/2) & \text{für} & f < 0 \end{array} \right\} = |H(f)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(f)}$$

wobei

$$|H(f)| = 1 \text{ für } f \neq 0 \text{ und } \varphi(f) = \left\{ \begin{array}{lll} -\pi/2 & \text{für} & f > 0 \\ \pi/2 & \text{für} & f < 0 \end{array} \right\}$$

$$\varphi(f) = -\pi\left[\varepsilon(f) - \frac{1}{2}\right]$$

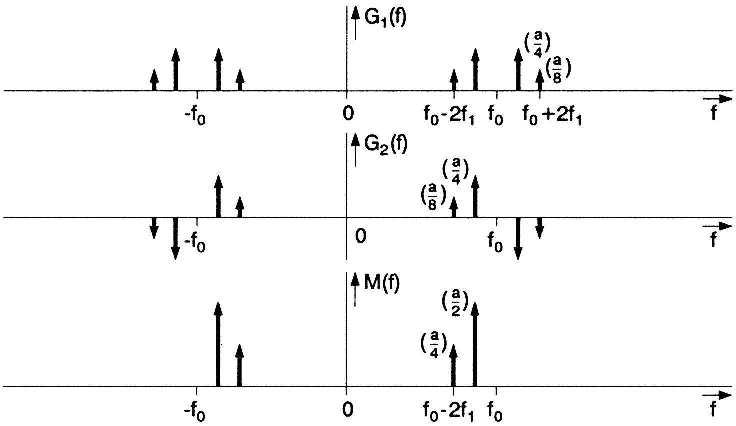
$$H(f) = -\mathrm{j}[2\varepsilon(f) - 1] \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(t) = -\mathrm{j}\left(\delta(t) + \frac{\mathrm{j}}{\pi t} - \delta(t)\right)$$
$$= \frac{1}{\pi t}$$

$$s(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{s}(t) \quad \text{„Hilbert-Transformation"}$$

b) $g_1(t) = f(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_1(f)$,

$$g_2(t) = \left(f(t) * \frac{1}{\pi t}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_2(f)$$

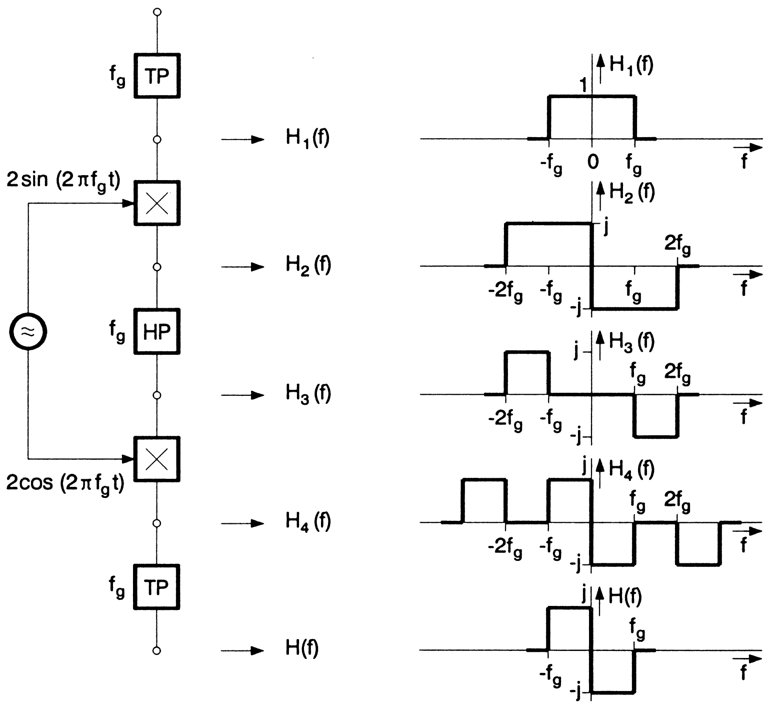
$$M(f) = G_1(f) + G_2(f)$$



c) $M(f)$ aus b) → unteres Seitenband; bei Ansteuerung des unteren Multiplikators mit $-\sin(\cdot)$ → Erzeugung des oberen Seitenbandes.

Aufgabe 10.6

a)



b) $H(f) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,(f) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_\mathrm{g}}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(t) = \frac{1}{\pi t} * [2f_\mathrm{g}\mathrm{si}(\pi 2 f_\mathrm{g} t)]$

„Hilbert-Transformation" für $0 < |f| < f_\mathrm{g}$

Aufgabe 10.7

a) FM-Signal: $m(t) = \cos[2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t)]$

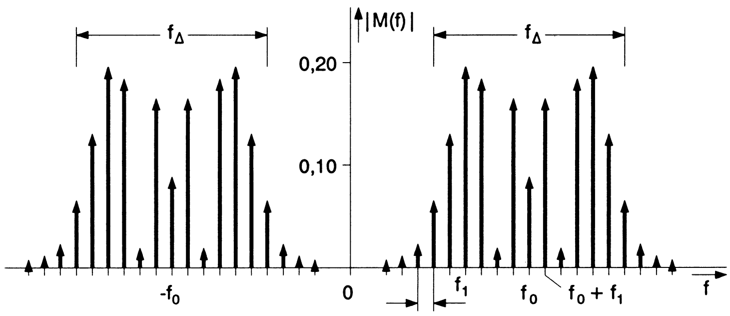
Modulationsindex: $\mu = \dfrac{\Delta F}{f_g} = \dfrac{75\,\text{kHz}}{15\,\text{kHz}} = 5$

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \cos[2\pi t(f_0 + nf_1)]$$

$$M(f) = \sum_{n=\infty}^{\infty} J_n(\mu) \frac{1}{2}[\delta(f + f_0 + nf_1) + \delta(f - f_0 - nf_1)]$$

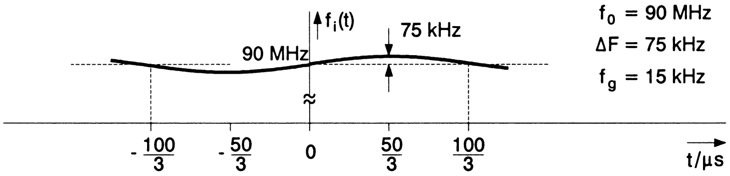
wobei

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{und} \quad J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$



Carson-Bandbreite: $f_\Delta = 2(\mu + 1)f_g = 2(\Delta F + f_g) = 180\,\text{kHz}$

b) $f_{i_{\text{FM}}}(t) = f_0 + kf(t) = f_0 + \Delta F \sin(2\pi f_g t)$



Aufgabe 10.8

$m(t) = \cos(2\pi f_0 t) - a \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_1 t)$

für die Trägerfrequenz f_0 gilt:

$m_T(t) = 1 + \mathrm{j}\, a \sin(2\pi f_1 t) \mathrel{\widehat{=}}$ äquivalentes TP-Signal

$m(t) = |m_T| \cos\left[2\pi f_0 t + \Theta_T(t)\right]$

$m(t) = \sqrt{1 + a^2 \sin^2(2\pi f_1 t)} \cos\left[2\pi f_0 t + \arctan(a \sin 2\pi f_1 t)\right]$

mit $|a| \ll 1$ folgt: $m(t) \approx \cos\left[2\pi f_0 t + a \sin(2\pi f_1 t)\right]$

Aufgabe 10.9

$m(t) = \cos\left[2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t)\right]$

$$
\begin{aligned}
P &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} m^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2\left[2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t)\right]\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left[4\pi f_0 t + 2\mu\sin(2\pi f_1 t)\right]\right\}\mathrm{d}t = 1/2
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis kann man auch sofort sehen, da Leistung eines „gedehnten“ Cosinussignals.

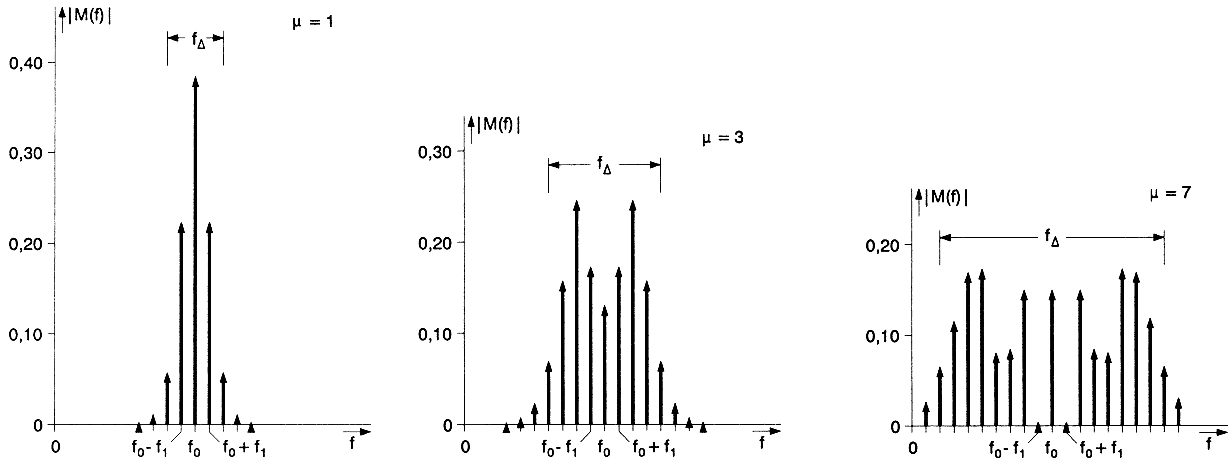
Aufgabe 10.10

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu)\cos(2\pi f_0 t + n\cdot 2\pi f_1 t) \quad (10.28)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

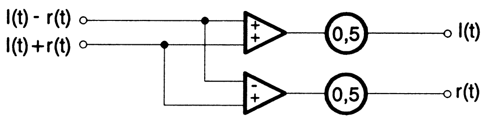
$$M(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu)\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0 - nf_1) + \delta(f + f_0 + nf_1)\right] \quad (10.29)$$

Carson-Bandbreite $f_\Delta = 2(\mu + 1)f_\mathrm{g}$ mit $f_\mathrm{g} = f_1$

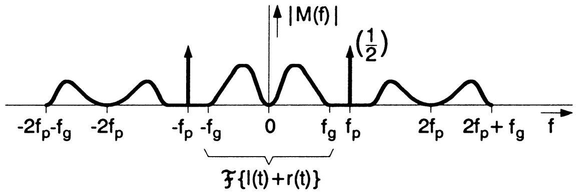


Aufgabe 10.11

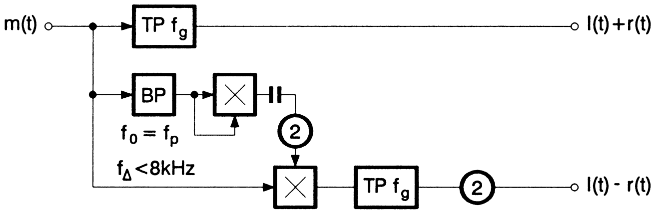
a)



b)



c)



d) Kompromiß zwischen

1. Bedingung:	für fehlerfreie Rückgewinnung $\Rightarrow f_\mathrm{p} > f_\mathrm{g}$
2. Bedingung:	kleine Übertragungsbandbreite $\Rightarrow f_\mathrm{p}$ möglichst klein
3. Bedingung:	billiger Bandpaß (niedrige Güte) $\Rightarrow f_\Delta$ möglichst groß

Zu Kapitel 11

Aufgabe 11.1

Zeitmultiplexsystem nach Abb. 11.3 mit $s(t)$ aus Aufgabe 10.1

a) T = Taktzeit auf dem Übertragungskanal

$\Rightarrow 2T$ = Rahmentaktzeit = Abtastperiode pro Tiefpasssignal

$\Rightarrow f_g \leq \dfrac{1}{4T} = 2\,\text{kHz}$ mit $T = 125\,\mu\text{s}$

keine Eigeninterferenzen, da mit $\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(\tau) = \Lambda(\tau/t_0)$

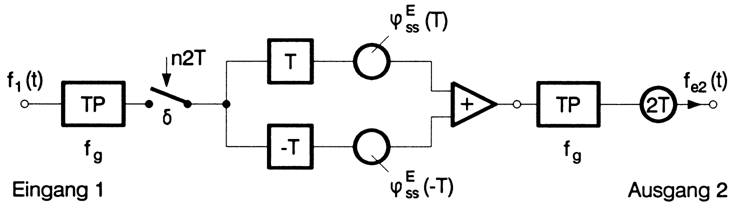
und $t_0 = 1{,}25\,T$ gilt:

$\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(n \cdot 2T) = 0$ für $\forall n \neq 0$ (1. Nyquist-Kriterium)

b) $H(f) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{2f_{\mathrm{g}}}\right) = \mathrm{rect}(2Tf)$

da keine Eigeninterferenzen auftreten

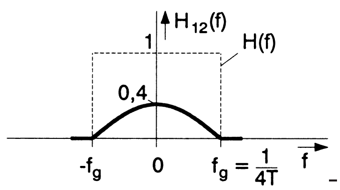
c) Ersatzschaltung für „Nebensprechen“



$H_{12}(f) = \mathrm{rect}(2Tf) \cdot 2\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(T)\cos(2\pi fT)$

mit $\varphi_{ss}^{\mathrm{E}}(T) = (t_0 - T)/t_0 = 0{,}2$ und $f_{\mathrm{g}} = \dfrac{1}{4T}$

$\Rightarrow a = -20\lg\dfrac{|H_{12}(f)|_{\max}}{|H(f)|_{\max}} = 7{,}96\,\text{dB}$



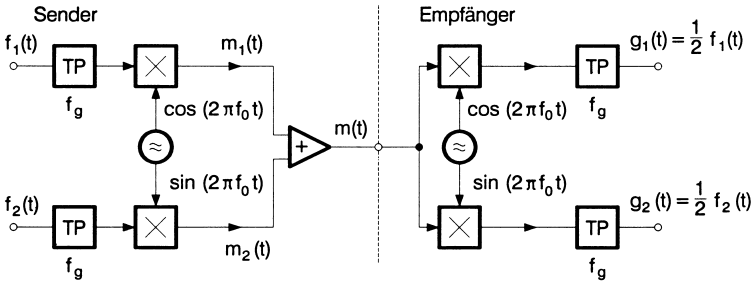
-10

Aufgabe 11.2

a) PAM-Zeitmultiplex:
   Rahmentaktzeit: $T \overset{!}{\leq} \dfrac{1}{2f_{\mathrm{g}}}$
   $\Rightarrow$ Taktzeit auf Kanal: $T_{\mathrm{k}} = \dfrac{T}{Q} = \dfrac{1}{2f_{\mathrm{g}} \cdot Q}$
   Q-Fernsprechsignale:
   $\Rightarrow$ Bandbreitenbedarf: $f_{\mathrm{k}} \geq \dfrac{1}{2T_{\mathrm{k}}} = f_{\mathrm{g}} \cdot Q = 400\,\mathrm{kHz}$

b) Frequenzmultiplex:
   z.B. mit Einseitenband-Amplitudenmodulation
   $\Rightarrow f_{\mathrm{k}} = f_{\mathrm{g}} \cdot Q = 400\,\mathrm{kHz}$

Aufgabe 11.3



$m(t) = f_1(t)\cos(2\pi f_0 t) + f_2(t)\sin(2\pi f_0 t)$
bei kohärentem Empfang folgt:

$$m(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}f_1(t)\cdot\big[1+\cos(4\pi f_0 t)\big] + \frac{1}{2}f_2(t)\cdot\sin(4\pi f_0 t)$$

$$m(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}f_1(t)\cdot\sin(4\pi f_0 t) + \frac{1}{2}f_2(t)\big[1-\cos(4\pi f_0 t)\big]$$

nach Tiefpassfilterung bleibt:

$g_1(t) = \dfrac{1}{2}f_1(t)$ und $g_2(t) = \dfrac{1}{2}f_2(t)$

Übertragungsbandbreite: $f_\Delta = 2f_{\mathrm{g}} \;\widehat{=}\;$ halbe Bandbreite eines kohärenten Frequenzmultiplex-Systems nach Abb. 11.6

Aufgabe 11.4

a) mit (11.25) und (11.26)

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{sd}(m) = \{7,-1,-1,-1,-1,-1,-1\}|S_d(k)|^2 \quad = \{1,\quad 8,\quad 8,\quad 8,\quad 8,\quad 8,\quad 8\}$$

b) Mittelwert $m_s = \displaystyle\sum_{n=0}^{M-1} s_{bd}(n) = -1$ oder $|m_s| = |S_d(0)|^2 = 1.$

   Relative „unbalance“ $|m_s|/M = 1/7$

c) z.B.

$$\begin{array}{r}
s_{bd}(n) = \{- - - + - + +\} \\
s_{bd}(n-1) = \{+ - - - + - +\} \\
\hline
s_{bd}(n) \cdot s_{bd}(n-1) = \{- + + - - - +\} = s_{bd}(n-3)
\end{array}$$

d) mit (11.29) für $r = 3$ und $a = 1 \Rightarrow 3/ggT(3{,}1) = 3$ ungerade ist erfüllt, damit $d = 3$:

$s_{2bd}(n) = s_{1bd}(3n) = \{- + + - + - -\}$

$s_{2bd}(n)$ ist wieder eine m-Folge

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{12d}(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_{1bd}(n) s_{2bd}(n+m) = \{-5, -1, -1, 3, -1, 3, 3\}$$

Die Schrankenbeziehung (11.28) ergibt

$|\varphi^{\mathrm{E}}_{12d}(m)| \leq 2^{\mathrm{ent}(3/2+1)} + 1 = 5$

e)
$$\left.\begin{array}{l}
s_{1bd}(n) = \{- - - + - + +\} \\
s_{2bd}(n) = \{- + + - + - -\}
\end{array}\right\} m\text{-Folgen}$$

$$\begin{array}{rl}
s_{3bd}(n) & = \{+ - - - - - -\} \\
s_{4bd}(n) & = \{- - + + + - -\} \\
| & = \{- + - - + - +\} \\
| & = \{+ - + - + + +\} \\
| & = \{- + + - - + -\} \\
| & = \{+ + + + - - +\} \\
s_{9bd}(n) & = \{+ + - + + + -\}
\end{array}$$

mit periodischen Korrelationsfunktionen z.B.

$$\begin{array}{l}
\varphi^{\mathrm{E}}_{66d}(m) = \{\ \ 7, -1, -5,\ \ 3,\ \ 3, -5, -1\} \\
\varphi^{\mathrm{E}}_{76d}(m) = \{-1, -1, -1, -1,\ \ 3, -1, -1\} \\
\varphi^{\mathrm{E}}_{81d}(m) = \{-1, -5, -1,\ \ 3,\ \ 3, -1, -1\}
\end{array}$$

Aufgabe 11.5

$Q = 4 \Rightarrow M = 5$ prim

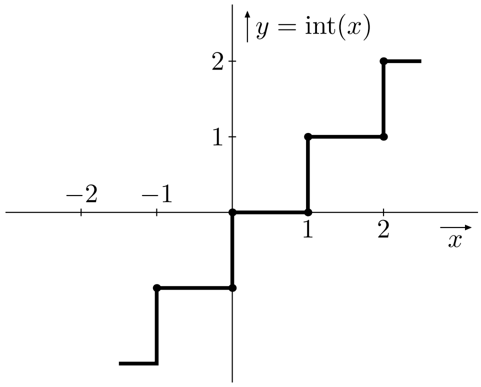
$$\begin{array}{r}
s_{1d}(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
s_{2d}(n) = \{1, 3, 5, 2, 4\} \\
s_{3d}(n) = \{1, 4, 2, 5, 3\} \\
s_{4d}(n) = \{1, 5, 4, 3, 2\} \\
\hline
\end{array}$$

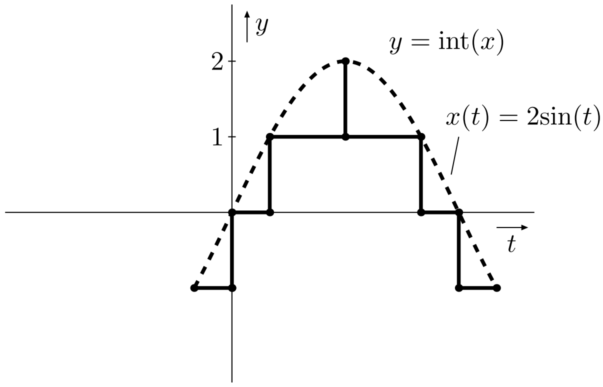
z. B. $s_{2d}(n-1) = \{4, 1, 3, 5, 2\}$

$s_{3d}(n-2) = \{2, 5, 3, 1, 4\}$ etc.

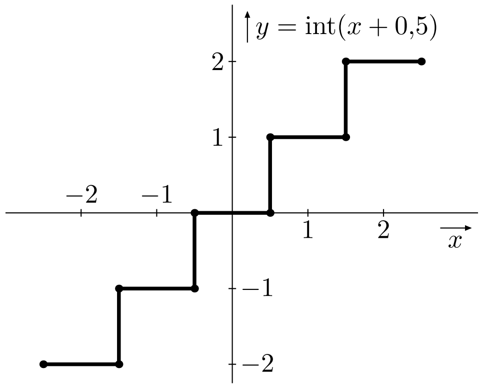
Zu Kapitel 12

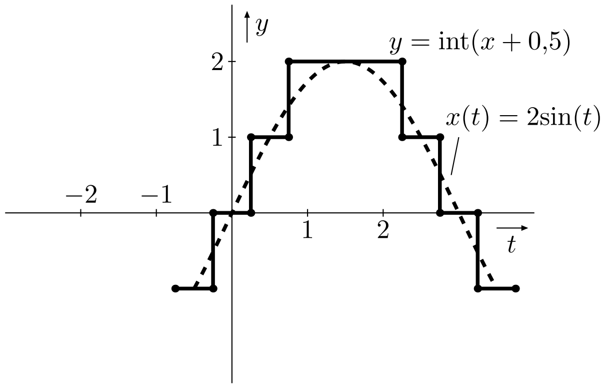
Aufgabe 12.1

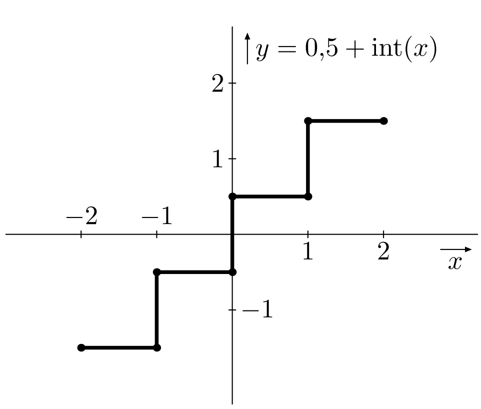


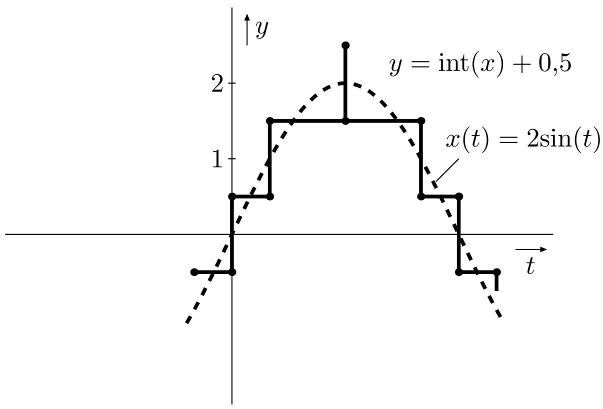


gebräuchliche Rundung:









Aufgabe 12.2

$\pi = 3{,}14159_{10} = 11{,}0010_2$;   rel. Fehler: 0,53%

Aufgabe 12.3

Gleichverteiltes Sprachsignal: $S_\mathrm{a} = \dfrac{A^2}{12}$

$$\frac{S_\mathrm{a}}{N_\mathrm{q}} = 2^{2k} \geq 10^4 \mathrel{\widehat{=}} 40\,\mathrm{dB} \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2}\,\mathrm{lb}\,10^4 = 6{,}7\,\mathrm{bit}$$

Mit $N_{P_\mathrm{e}} = P_\mathrm{e}\dfrac{\Delta^2}{3}2^{2k}$ und $S_\mathrm{a} = \dfrac{A^2}{12}$ folgt:

$$\frac{S_\mathrm{a}}{N_{P_\mathrm{e}}} = \frac{1}{4P_\mathrm{e}} \geq 10^4 \mathrel{\widehat{=}} 40\,\mathrm{dB} \quad \Rightarrow P_\mathrm{e} \leq 2{,}5 \cdot 10^{-5}$$

Es gilt: $P_\mathrm{e} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\dfrac{E}{8N_0}}$. Aus der Funktionstabelle für $\mathrm{erfc}(x)$ ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{E}{8N_0}} \approx 2{,}9 \quad \Rightarrow \frac{E}{N_0} = 67{,}3 \mathrel{\widehat{=}} 18{,}3\,\mathrm{dB}$$

Weiter folgt: $r = 2f_\mathrm{g} \cdot k = 56\,\mathrm{kbit/s} \Rightarrow f_\Delta = k \cdot f_\mathrm{g} = 28\,\mathrm{kHz}$

Aufgabe 12.4

a) Näherung: $P_\mathrm{w} \approx K \cdot P_\mathrm{e} = 0{,}08$
   Exakt: $P_\mathrm{w} = 1 - (1 - P_\mathrm{e})^K = 1 - 0{,}99^8 = 0{,}077$

b) $P_\mathrm{w} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^K$; für $K = 8$: $P_\mathrm{w} = 0{,}996 \approx 1$

Aufgabe 12.5

analog zur Näherung in Aufgabe 12.4:

$$1 - (1 - X)^M \approx M \cdot X$$

$$P_\mathrm{e,ges} \approx \frac{1}{2} \cdot M \cdot 2P_\mathrm{e} = M \cdot P_\mathrm{e}$$

Aufgabe 12.6

Quantisierungsrauschen: $N_\mathrm{q} = \dfrac{\Delta^2}{12}$
Amplitude: $A = M \cdot \Delta = \Delta \cdot 2^k$
Annahme: gleichverteiltes Signal

$$\Rightarrow \frac{S_\mathrm{a}}{N} = \frac{A^2}{12} \cdot \frac{12}{\Delta^2} = \frac{A^2}{\Delta^2} = M^2 = 2^{2k}$$

$$10\lg\left(\frac{S_\mathrm{a}}{N_\mathrm{q}}\right) \approx K \cdot 6\,\mathrm{dB} \overset{!}{\geq} 80\,\mathrm{dB}$$

$$\Rightarrow K = 14$$

Aufgabe 12.7

$S_\mathrm{a} = \sigma_f^2$ Amplitudenbereich: $A_\mathrm{max} = 6\sigma_f = \Delta \cdot 2^k$

$$N_\mathrm{q} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{3\sigma_f^2}{2^{2k}} \qquad \Rightarrow \frac{S_\mathrm{a}}{N_\mathrm{q}} = \frac{1}{3}2^{2k}$$

$$p_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_f^2}} \qquad \Rightarrow P = 2\int_{3\sigma_f}^{\infty} p_f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{erfc}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$$

Aufgabe 12.8

$M = 4$ Quantisierungsstufen

$L = 1,$ da Quantisierungsstufen statistisch unabhängig auftreten

$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = \frac{3}{8}$

$$\text{Entropie: } H = -2 \cdot \frac{1}{8} \operatorname{lb}\left(\frac{1}{8}\right) - 2\frac{3}{8} \operatorname{lb}\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{lb}(8) + \frac{3}{4} \operatorname{lb}\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\lg(2)}\left[\frac{1}{4} \operatorname{lb}(8) + \frac{3}{4} \operatorname{lb}\left(\frac{8}{3}\right)\right] = 1{,}81 \text{ bit/ Zeichen}$$

Informationsfluss: $H^* = r \cdot H = 2f_g$ Zeichen/ s $\cdot H$ bit / Zeichen

$H^* = 3{,}63 \frac{f_g}{\mathrm{Hz}}$ bit/ s

maximale Entropie: $H_o = \operatorname{lb}(M) = 2$ bit/ Zeichen für gleichwahrscheinlich erzeugte Zeichen

absolute Redundanz: $R = H_o - H \approx 0{,}2$ bit/ Zeichen

relative Redundanz: $R' = \frac{H_0 - H}{H_0} \mathrel{\widehat{=}} 10\%$

Zu Kapitel 13

Aufgabe 13.1

$$S_\mathrm{t} = \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{2T_0} \int\limits_{-T_0}^{T_0} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t-nT)\right]^2 \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{2T_0} \sum\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{\int\limits_{-T_0}^{T_0} s(t-nT)s(t-mT)\mathrm{d}t}_{=0 \text{ für } \forall n\neq m}\right]$$

$$\Rightarrow S_\mathrm{t} = \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{2T_0} \int\limits_{-T_0}^{T_0} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(t-nT)}_{\text{periodisch}}\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow$ Integration über eine Periode

$$S_\mathrm{t} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(t-nT)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t-nT)\mathrm{d}t = \frac{E}{T}$$

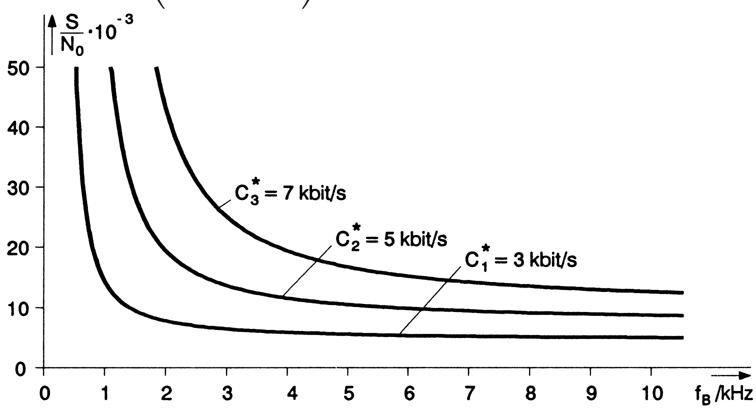
Aufgabe 13.2

mit $\mathrm{lb}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = \mathrm{lb}(\mathrm{e}) \cdot \ln(x)$

$$C^*_\infty = \lim_{f_\mathrm{B}\to\infty} \mathrm{lb}(\mathrm{e}) \cdot \frac{\ln\left(1+\dfrac{S}{2f_\mathrm{B}N_0}\right)}{1/f_\mathrm{B}} \text{ mit l'Hospital, Typ } 0,0 \Rightarrow$$

$$C^*_\infty = \mathrm{lb}(e) \lim_{f_\mathrm{B}\to\infty} \frac{-\dfrac{S}{2N_0 f_\mathrm{B}^2}}{\left(1+\dfrac{S}{2f_\mathrm{B}N_0}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{f_\mathrm{B}^2}\right)} = \mathrm{lb}(\mathrm{e}) \cdot \frac{S}{2N_0}$$

$$C^* = f_\mathrm{B}\mathrm{lb}\left(1+\frac{S}{2f_\mathrm{B}N_0}\right) \Rightarrow \frac{S}{N_0} = 2f_\mathrm{B}(2^{C^*/f_\mathrm{B}}-1)$$



Aufgabe 13.3

$$\left.\frac{S_\mathrm{a}}{N}\right|_\infty = \lim_{f_\Delta\to\infty} \left(1+\frac{f_\mathrm{g}}{f_\Delta}\frac{S_k}{2f_\mathrm{g}N_0}\right)^{f_\Delta/f_\mathrm{g}} - 1$$

Substitution: $x = f_\Delta \cdot \dfrac{2N_0}{S_k} \Rightarrow \dfrac{f_\Delta}{f_\mathrm{g}} = x \cdot \dfrac{S_k}{2f_\mathrm{g}N_0}$

wegen $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

$$\Rightarrow \left.\frac{S_\mathrm{a}}{N}\right|_\infty = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{S_k/(2f_\mathrm{g}N_0)} - 1 = \mathrm{e}^{S_k/(2f_\mathrm{g}N_0)} - 1$$

Aufgabe 13.4

a) Mit $S/N \gg 1$ aus (13.2)
$C^* \approx f_\mathrm{B}\mathrm{lb}\dfrac{S}{N} = f_\mathrm{B}\dfrac{\mathrm{lb}10}{10}\left(10\mathrm{lg}\dfrac{S}{N}\right)$
und $10/\mathrm{lb}10 = 10\,\mathrm{lg}\,2 = 3{,}0103$

b) mit $f_\mathrm{B} = 4\,\mathrm{kHz}$: $\quad C^* \approx \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot 40\,\mathrm{kbit/s} = 53{,}3\,\mathrm{kbit/s}$